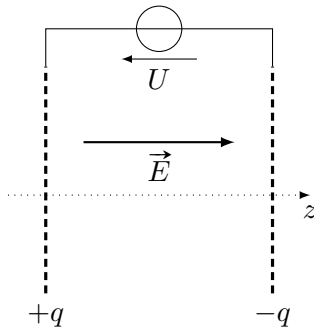


1 Force de Lorentz

1.1 Introduction : champs électrique et magnétique

- **Champ électrique.** On constitue un condensateur avec deux armatures métalliques de surface S .



On a :

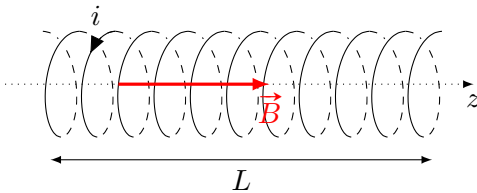
$$\vec{E} = \frac{q/S}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Le champ électrique va des charges positives aux charges négatives. Comme on le verra, il **indique le sens de la force subie par une charge positive**. Il s'exprime en V/m. ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

Quelques ordres de grandeur :

- Surface de la Terre : $10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Orage : $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Téléphonie mobile (norme dépendant de la fréquence) : $50 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

- **Champ magnétique.** On constitue une bobine par un enroulement de N spires sur une longueur L .



Le champ magnétique est orienté par le courant, on le verra plus tard. Il s'exprime en teslas (T). μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On a :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} i \vec{u}_z$$

Quelques ordres de grandeur :

- Bobine de 1000 spires, de 10 cm de longueur, parcourue par 1A : 10^{-2} T .
- Bobine IRM : 10 T.
- Aimants permanents : 0,01 à 0,1 T.

1.2 La force de Lorentz

On considère pour la suite des champs **uniformes** (constants dans l'espace) et **stationnaires** (constants dans le temps).

Force de Lorentz. La force subie par une charge q plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ est :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

$q\vec{E}$ est la **force électrique**, $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la **force magnétique**.

Remarque. Rappel : le résultat du **produit vectoriel** est un vecteur.

- pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$, et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ constitue un trièdre direct. La norme du produit vectoriel est :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times |\sin(\theta)|$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

- le produit vectoriel est antisymétrique :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Par conséquent :

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

- Pour calculer un produit vectoriel, on projette les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans une **base orthonormale directe** (pas forcément cartésienne) et on développe. On utilise :

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

1.3 Comparaison au poids

Comparons l'amplitude de cette force par rapport au poids pour un électron :

- ▷ Partie électrique $\|\vec{F}_e\| = eE$. Le poids est négligeable si :

$$E \gg \frac{mg}{e} = 10^{-10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Pour un proton, le rapport est alors de $10^{-7} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Étant donné les ordres de grandeurs cités précédemment, **le poids est toujours négligeable.**

- ▷ Partie magnétique. Considérons pour obtenir un ordre de grandeur $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$\|\vec{F}_m\| = evB$$

Dans le cas d'un champ magnétique créé par une bobine, le poids est négligeable si :

$$v \gg \frac{mg}{eB} = 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

De même, **le poids est toujours négligeable.**

Pour des particules chargées à l'échelle atomique (électron, proton, ion, noyaux), le poids est négligeable devant la force de Lorentz.

1.4 Puissance de la force de Lorentz

La puissance de la force de Lorentz est :

$$\mathcal{P} = \left(q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \right) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Comme $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$, la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas. Le TPC donne alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Seule la partie électrique peut faire varier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

Un champ magnétique ne peut pas accélérer ou freiner une particule chargée. Par contre, il peut la dévier.

1.5 Potentiel électrostatique

Considérons le travail de la force de Lorentz pour un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$ (peu importe la valeur du champ magnétique, celui-ci ne travaille pas) entre deux points quelconques A et B :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B q E_0 \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z)$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = q E_0 (z_B - z_A)$$

Le travail de la force de Lorentz ne dépend que des coordonnées de A et de B. Elle est donc **conservative**. On peut identifier E_p à partir de $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p : E_p = -q E_0 z$.

Énergie potentielle électrostatique. La force électrique est **conservative** et l'énergie potentielle correspondante est, pour $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$:

$$E_p = -q E_0 z$$

Définition. Le **potentiel électrostatique** est la grandeur :

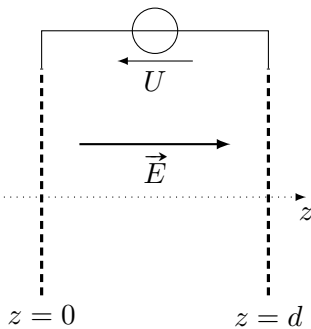
$$V = \frac{E_p}{q}$$

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. Ce résultat est une conséquence directe de l'égalité $\vec{F} = q \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ vue au chapitre M4.

Définition. La **tension** entre deux points A et B est la différence de potentiel entre ces deux points :

$$U = V(B) - V(A)$$

Réalisation expérimentale d'un champ électrique :



On applique une tension U entre deux grilles planes parallèles et distantes de d , on obtient un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est le vecteur orthogonal aux armatures. On a alors $V(z) = -E_0 z$ d'où :

$$U = V(0) - V(d) = E_0 d$$

On a donc créé un champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{u}_z$$

2 Mouvement dans un champ électrique

2.1 Accélération d'une particule chargée

Dans la situation ci-dessus, on considère une particule chargée avec $q > 0$, arrivant en $z = 0$ avec une vitesse $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_z$. On cherche sa vitesse en sortie ($z = d$). On peut le faire en posant le PFD, mais c'est peu astucieux. **Utilisons plutôt le TEM.** Notons m sa masse. On repère donc le centre d'inertie M de la particule chargée dans le référentiel du laboratoire.

- On note t_i le moment où la particule arrive en $z = 0$. La norme de la vitesse est alors v_0 et le potentiel est $V(0)$:

$$E_m(t_i) = \frac{1}{2} m v_0^2 + q V(0)$$

- On note t_f le moment où la particule arrive en $z = d$. La norme de la vitesse est v_f (inconnue) et le potentiel est $V(d)$:

$$E_m(t_f) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d) \quad \text{donc} \quad v_f^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}(V(0) - V(d))$$

On reconnaît la tension $U = V(0) - V(d)$ ainsi :

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}}$$

Application numérique : pour un proton (charge $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C et masse $m = 1,673 \times 10^{-27}$ kg), initialement au repos et accéléré par $U = 1$ kV :

$$v_f = 4,4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 440 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Remarque.

1. L'électron-volt est une unité d'énergie égale à :

$$1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = e \times 1 \text{ V}$$

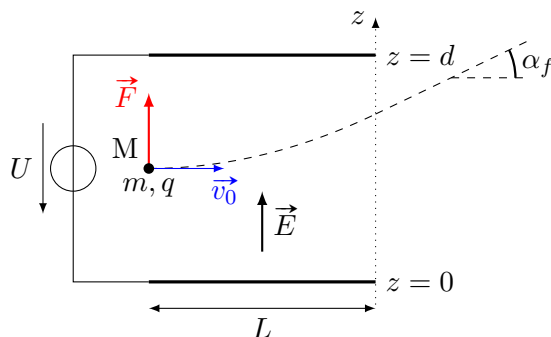
C'est l'énergie cinétique que gagne un électron (ou un proton) lorsqu'il est accéléré par une tension de 1 V.

2. En prenant $U < 0$, on peut ralentir la particule chargée (si $q > 0$). Elle peut même faire demi-tour si $qU > \frac{1}{2}mv_0^2$. Elle ressort alors avec la même énergie cinétique (puisque l'énergie potentielle ne change pas), donc la même vitesse en norme, mais de sens opposé.

2.2 Déviation d'une particule chargée

- ❶ **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique $\vec{E}$, par rapport au référentiel du laboratoire. U est positif vers la gauche. La particule arrive avec une vitesse orthogonale au champ électrique.

- ❷ **Schéma.**



- ❸ **Modélisation.** On choisit des coordonnées cartésiennes.

- La particule chargée est assimilée à un point matériel M, de masse m et de charge q .
- On repère le mouvement de M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, où $\vec{u}_z$ est la direction perpendiculaire aux grilles si bien que $\vec{E} = E_0\vec{u}_z$ avec $E_0 = U/d$; $\vec{u}_x$ est la direction de la vitesse $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ complète la base orthonormale directe.
- Instant initial : moment où la particule entre dans la zone de champ – l'origine est la position initiale de la particule chargée :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$$

④ **Bilan des forces.**

- Le poids est négligeable.
- La force électrique :

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE_0\vec{u}_z = q\frac{U}{d}\vec{u}_z$$

⑤ **Accélération.** Il n'y a pas de contraintes sur le mouvement de la charge :

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

⑥ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

⑦ **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = q\frac{U}{d} \end{cases}$$

⑧ **Répondre aux questions.** On intègre avec $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{z}(0) = 0$; on ignore la projection en y (où il n'y aura pas de mouvement) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{z}(t) = \frac{qU}{dm}t \end{cases}$$

On intègre une seconde fois avec $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = v_0t \\ z(t) = \frac{qU}{2dm}t^2 \end{cases}$$

On a ainsi :

$$t = \frac{x(t)}{v_0} \quad \text{d'où} \quad z(t) = \frac{qU}{2dm} \frac{x(t)^2}{v_0^2}$$

La trajectoire est la parabole d'équation :

$$z = \frac{qU}{2dmv_0^2}x^2$$

Remarque. Angle de déviation. La particule sort avec un angle par rapport à l'horizontale tel que :

$$\tan \alpha_f = \frac{\dot{z}(t_f)}{\dot{x}(t_f)}$$

où t_f est le moment où la particule arrive en L : $x(t_f) = L$ soit $t_f = L/v_0$. Ainsi, si l'angle est petit, on obtient un angle de déviation proportionnel à U :

$$\alpha_f \approx \frac{qUL}{mv_0^2d}$$

La particule continue en mouvement rectiligne uniforme une fois sortie de la zone de champ électrique.

2.3 Applications

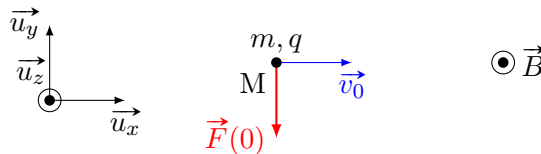
Le champ électrique est rarement utilisé seul, nous verrons plus d'applications après l'étude du mouvement dans un champ magnétique.

- **Accélérateur linéaire.** On peut accélérer une particule chargée grâce à un champ électrique.
- **Oscilloscope analogique.** Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

3 Mouvement dans un champ magnétique

3.1 Mise en équation

- ❶ **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique $\vec{B}$, dans le référentiel du laboratoire.
- ❷ **Schéma.** (vitesse perpendiculaire au champ magnétique et $q > 0$)



- ❸ **Modélisation.** On choisit des coordonnées cartésiennes.
 - La particule chargée est assimilée à un point matériel M, de masse m et de charge q .
 - On repère le mouvement de M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. $\vec{u}_z$ est la direction du champ magnétique : $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. On précisera les autres vecteurs plus tard.
 - Instant initial : à préciser ; l'origine est la position initiale de la particule chargée :

$$\overrightarrow{OM(0)} = \vec{0}$$

- ❹ **Vitesse et accélération.** Il n'y a pas de contraintes sur le mouvement de la charge :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

- ❺ **Bilan des forces.**

- Le poids est négligeable.
- La force magnétique :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Avec $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$ et $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$:

$$\vec{F} = -q\dot{x}(t)B_0\vec{u}_y + q\dot{y}(t)B_0\vec{u}_x$$

- ❻ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

- ❼ **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = q\dot{y}(t)B_0 \\ m\ddot{y}(t) = -q\dot{x}(t)B_0 \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

⑧ **Répondre aux questions.** Nous allons étudier plusieurs cas possibles.

Avant de poursuivre, considérons le TPC. La force magnétique ne travaille pas car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = 0$$

Le carré de la norme de la vitesse $v^2 = v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2$ est donc une constante. Or, d'après la projection en z du PFD, $v_z(t)$ est constante.

La quantité $v_x(t)^2 + v_y(t)^2$ est constante.

3.2 Cas où la vitesse initiale est colinéaire au champ magnétique

Considérons $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_z$. Comme $v_x(t)^2 + v_y(t)^2$ est constante et que sa valeur initiale est nulle, alors, $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont nulles à tout instant. La composante $v_z(t)$ est quant à elle constante et reste égale à v_0 .

Si la vitesse initiale est colinéaire au champ magnétique, alors le mouvement de la particule chargée est rectiligne uniforme.

3.3 Cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique

On considère :

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$$

Comme $v_z(t)$ est constant, $v_z(t) = 0$: il n'y a pas de mouvement en z .

3.3.1 Résolution en coordonnées cartésiennes

On s'intéresse au mouvement dans le plan (Oxy). Partons du PFD :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB_0}{m} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m} \dot{x}(t) \end{cases}$$

Nous avons deux équations couplées. Pour les découpler, intégrons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB_0}{m} y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m} x(t) + K' \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes K et K' , on utilise les conditions initiales :

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = \frac{qB_0}{m} y(0) + K = K \quad \text{donc} \quad K = v_0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = -\frac{qB_0}{m} x(0) + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = 0$$

Finalement :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB_0}{m} y(t) + v_0 \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m} x(t) \end{cases}$$

On peut injecter cela dans les équations du PFD :

► **Composante x .** On part de $\dot{y} = -qB_0x/m$ que l'on injecte dans la projection en x du PFD :

$$\ddot{x}(t) = \frac{qB_0}{m}\dot{y}(t) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x(t)$$

On note $\omega_c = |q| B_0/m$:

$$\ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = 0$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. Sa solution générale est :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_c t) + B_1 \sin(\omega_c t)$$

On utilise les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) = A_1 & \quad \text{or} \quad x(0) = 0 & \quad \text{donc} \quad A_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_c B_1 & \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = v_0 & \quad \text{donc} \quad B_1 = \frac{v_0}{\omega_c} \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)}$$

Définition. $\omega_c = |q| B_0/m$ est appelée **pulsation cyclotron** et $R_c = v_0/\omega_c$ est appelé **rayon cyclotron**.

► **Composante y .** On part de $\dot{x} = -qB_0y/m + v_0$ que l'on injecte dans la projection en y du PFD :

$$\ddot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m}\dot{x}(t) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 y(t) - \frac{qB_0}{mv_0}$$

On retrouve $\omega_c = |q| B_0/m$:

$$\ddot{y}(t) + \omega_c^2 y(t) = -\omega_c^2 \frac{v_0 m}{qB_0}$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique avec second membre. Sa solution générale est :

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_c t) + B_2 \sin(\omega_c t) - \frac{v_0 m}{qB_0}$$

On utilise les conditions initiales :

$$\begin{aligned} y(0) = A_2 - \frac{v_0 m}{qB_0} & \quad \text{or} \quad y(0) = 0 & \quad \text{donc} \quad A_2 = \frac{v_0 m}{qB_0} \\ \dot{y}(0) = \omega_c B_2 & \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = 0 & \quad \text{donc} \quad B_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0 m}{qB_0} (\cos(\omega_c t) - 1)}$$

— Si $q > 0$, alors $q = |q|$: on a alors :

$$x(t) = R_c \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = R_c (\cos(\omega_c t) - 1)$$

Cela correspond à un cercle de rayon R_c et de centre $(0, -R_c)$. En effet :

$$x(t)^2 + (y(t) + R_c)^2 = R_c^2 \sin^2(\omega_c t) + R_c^2 \cos^2(\omega_c t) = R_c^2$$

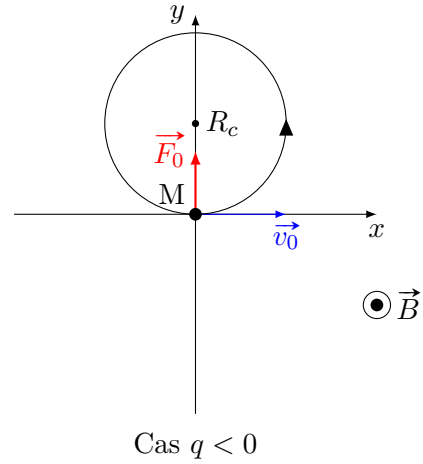
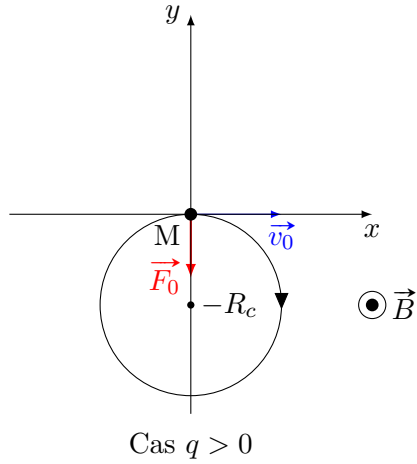
— Si $q < 0$, alors $q = -|q|$:

$$x(t) = R_c \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = R_c (1 - \cos(\omega_c t))$$

Cela correspond à un cercle de rayon R_c et de centre $(0, R_c)$. En effet :

$$x(t)^2 + (y(t) - R_c)^2 = R_c^2 \sin^2(\omega_c t) + R_c^2 \cos^2(\omega_c t) = R_c^2$$

Bilan. La particule chargée décrit un cercle de rayon R_c , de centre $(0, \pm R_c)$ à la vitesse angulaire ω_c .



Remarque. On aurait pu obtenir la trajectoire directement sachant que $v_x^2(t) + v_y^2(t) = \text{Cte} = v_0^2$:

$$\left(\frac{qB_0}{m}y(t) + v_0\right)^2 + \left(-\frac{qB_0}{m}x(t)\right)^2 = v_0^2$$

avec $\omega_c = |q| B_0/m$:

$$\left(y + \frac{v_0 m}{q B_0}\right)^2 + (x)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

On reconnaît donc l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\left(0, -\frac{v_0 m}{q B_0}\right)$ et de rayon $R_c = v_0/\omega_c = \frac{v_0 m}{|q| B_0}$.

3.3.2 Résolution en coordonnées cylindriques

Supposons le mouvement circulaire. On peut rapidement trouver le rayon et la vitesse angulaire : on pose donc un mouvement circulaire de centre O (inconnu) et de rayon R .

Vitesse angulaire. On a :

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Or, comme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qR\dot{\theta}B_0 \vec{u}_r$$

On applique le PFD. La projection sur $\vec{u}_\theta$ est peu utile (elle nous dit que ω est constante). La projection en $\vec{u}_r$ est :

$$-mR\dot{\theta}^2 = qR\dot{\theta}B_0$$

$$\dot{\theta} = -\frac{qB_0}{m}$$

Si $q > 0$, on a $\dot{\theta} = -\omega_c$ (rotation sens horaire) ; si $q < 0$, on a $\dot{\theta} = \omega_c$ (sens trigonométrique).

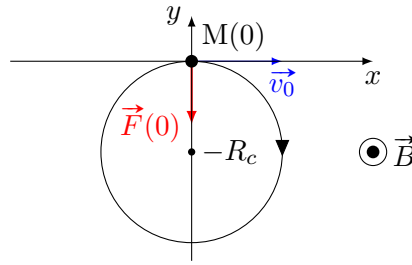
Rayon. Pour obtenir le rayon, on utilise :

$$\|\vec{v}(0)\| = v_0$$

Or $\|\vec{v}(0)\| = R|\dot{\theta}|$ soit :

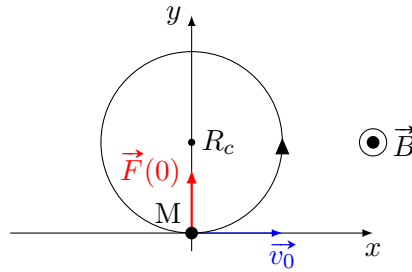
$$R = \frac{v_0}{\omega_c}$$

Conclusion. Si une trajectoire circulaire existe, elle doit partir de $M(0)$, avec la direction de $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, être de rayon R_c et être parcourue dans le sens horaire. La trajectoire ci-dessous vérifie ces conditions :



On a donc identifié une trajectoire vérifiant le principe fondamental de la dynamique et respectant les conditions initiales. C'est la solution du problème.

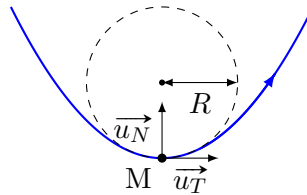
De même, pour $q < 0$, si une trajectoire circulaire existe, elle doit partir de $M(0)$, avec la direction de $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, être de rayon R_c et être parcourue dans le sens trigonométrique. La trajectoire ci-dessous vérifie ces conditions :



Remarque. Le sens de la force à $t = 0$ ($\vec{F}(0) = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$) indique dans quel sens se courbe la trajectoire.

3.3.3 Résolution dans le repère de Frénet

Considérons un point M se déplaçant le long d'une trajectoire :



- on définit $\vec{u}_T$ le vecteur tangent à la trajectoire en M ;
- on définit $\vec{u}_N \perp \vec{u}_T$ et dirigé vers l'intérieur de la courbe.

De part sa définition :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM(t+dt)} - \overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \frac{\overrightarrow{OM(t+dt)} + \overrightarrow{M(t)O}}{dt} = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}$$

le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire :

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{u}_T}$$

On peut par ailleurs définir un cercle localement tangent à la trajectoire nommé **cercle osculateur** : on note R son rayon et on le nomme **rayon de courbure**. Nous admettrons que :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$$

$\gamma = 1/R$ est appelée **courbure** de la trajectoire.

- Pour une trajectoire rectiligne, $R = +\infty$ et $\gamma = 0$. L'accélération est alors :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

on retrouve le résultat obtenu en coordonnées cartésiennes pour un mouvement rectiligne ($\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x = \frac{d\dot{x}}{dt} \vec{u}_x$).

- Pour un mouvement circulaire, la formule démontrée en coordonnées polaires se confond avec celle-ci (le cercle osculateur est simplement la trajectoire du point) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

avec $v = R\omega$.

Résolution dans le repère de Frénet. On raisonne dans le plan du mouvement, orthogonal à $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q (v \vec{u}_T) \wedge (B_0 \vec{u}_z) = \pm q v B_0 \vec{u}_N$$

Attention, le repère $(\vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_z)$ n'est pas forcément direct : on ne connaît donc pas le signe du produit vectoriel pour le moment. Par ailleurs :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = \pm q v B_0 \\ m \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

Comme m , R et v sont positifs, $\pm q = |q|$. Ainsi, d'après la seconde équation, la vitesse est constante :

$$\boxed{v(t) = v_0}$$

D'après la première :

$$m \frac{v^2}{R} = |q| v B_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \frac{m v_0}{|q| B_0}}$$

3.4 Cas général

Soit $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$. Les équations du mouvement découpent le mouvement dans le plan xy et selon z .

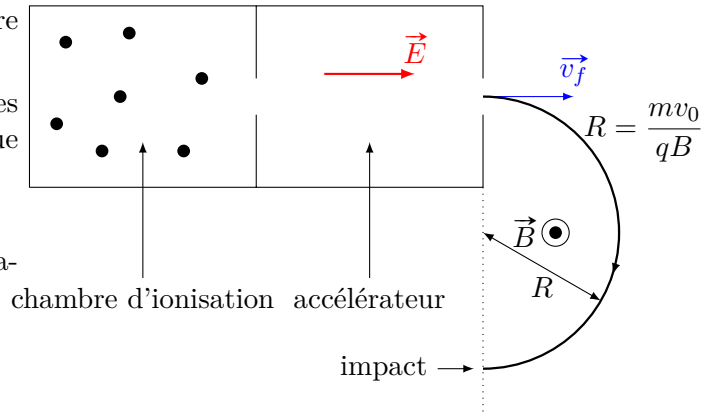
- La composante z de la vitesse est une constante : $v_z(t) = v_{0z}$;
- Quant aux composantes x et y , on a $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = v_{0x}^2$ et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon $R = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$.

La trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de (Oz) et d'une translation le long de cet axe : il s'agit d'un **mouvement hélicoïdal**.

3.5 Applications

- **Le spectromètre de masse.** Le spectromètre de masse permet de mesurer la masse d'atomes, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

- Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation.
- Une ouverture fait sortir un flux de particules qui sont accélérés par un champ électrique pour les amener à une vitesse $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.
- Ensuite un champ magnétique courbe leur trajectoire, avec un rayon



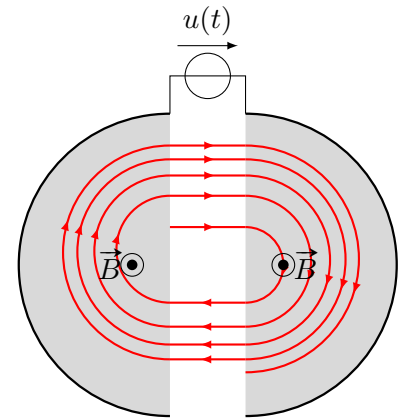
$$R_c = \frac{v_f m}{qB} = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{m}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U}{q}} \sqrt{m}$$

La donnée de la distance d'impact permet donc de retrouver la masse des particules.

- **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres (les *dees*) dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

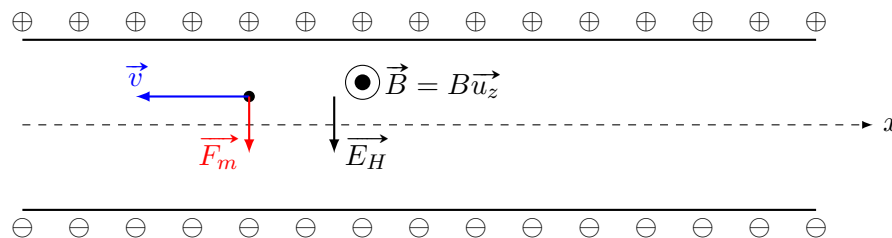
- La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les *dees* ;
- elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone inter-dees ;
- le courant est alternatif si bien que la tension accélère de nouveau la particule ;
- le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de eU . La vitesse croît donc comme la racine carrée du nombre de passage dans l'espace inter-dees.



Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. On pourra visualiser l'animation http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.php.

- **L'effet Hall.** On considère un fil parcouru par une intensité i vers la droite. les électrons se déplacent en sens inverse soit $\vec{v} = -v\vec{u}_x$. Si un champ magnétique est imposé, ils sont déviés vers le bas. Un déséquilibre de particule s'installe, à l'origine d'un champ, dit de Hall.



En régime permanent, la force résultant de ce champ de Hall compense la force magnétique :

$$-e\vec{E}_H - evB\vec{u}_x = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{E}_H = -vB\vec{u}_x$$

On mesure la tension entre la partie supérieure du conducteur et la partie inférieure :

$$U = V(x = d) - V(x = 0) = vBd$$

La mesure de U permet la mesure du champ B . C'est le principe des teslamètres à effet Hall.