

Variables aléatoires réelles Chapitre 12

Corrections exercices types

Exercice 1. 12-1 Fonction de répartition d'une variable à densité

On considère une variable aléatoire X .

1. Montrons que la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$ est une densité.

- (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive : en effet $f(x) = e^{-x} > 0$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$.
- (b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction usuelle et f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt.$

Cette intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $M > 0$ alors $\int_0^M e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^M = 1 - e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1.$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$

Conclusion : f est une densité de X .

2. Déterminons alors la fonction de répartition F de X .

D'après le cours, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

$X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ (car la densité f de X ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+.$)

Si $x < 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

Si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}.$

Bilan : la fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. 12-2

Montrons qu'une densité f_Y de Y est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$

On a prouvé dans le cours que Y est une variable aléatoire à densité si X est une variable aléatoire à densité. De plus, on a prouvé que

- Si $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$
- Si $a < 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$

Pour déterminer une densité de Y il suffit de dériver partout où cela est possible la fonction de répartition de Y . Ainsi

- Si $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, F'_Y(x) = \frac{1}{a} F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$
- Si $a < 0, \forall x \in \mathbb{R}, F'_Y(x) = -\left(\frac{1}{a} F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$

Conclusion :

une densité f_Y de Y est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$

Exercice 3. 12-3

On considère une variable aléatoire X . La fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité. (cf. exo ??).

Montrons que X admet une espérance et calculons $E(X)$.

Sous réserve de convergence absolue : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.$

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ (car $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$).

La convergence absolue de cette intégrale se résume à la convergence simple car $\forall t \geq 0, te^{-t} \geq 0$.

Soit $M > 0$, on va effectuer une IPP.

On pose $u'(t) = e^{-t}$, $u(t) = -e^{-t}$, $v(t) = t$, $v'(t) = 1$ avec u et v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Alors, $\int_0^M te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^M + \int_0^M e^{-t} dt = -Me^{-M} + 1 - e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$ car par CC $Me^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $E(X)$ existe et vaut 1.

Exercice 4. 12-4

On considère une variable aléatoire X . Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ Montrons que f est une densité de X .

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive : en effet $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} > 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$
2. f est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonction usuelle dont le dénominateur ne s'annule et f est continue sur $] -\infty, 1[$ en tant que fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.
Cette intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $M > 0$ alors $\int_1^M \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_1^M = 1 - \frac{1}{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Conclusion : f est une densité de X .

Montrons que X n'admet pas d'espérance.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

Or, cette intégrale est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1$) donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 5. 12-5

Soit X une var suivant la loi exponentielle de paramètre 1, la var $T = \frac{1}{1 + e^{-X}}$ admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

X une var suivant la loi exponentielle de paramètre 1, donc d'après le cours : une densité pour X est $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$.

On va utiliser un théorème de transfert.

Soit $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Par théorème de transfert, on s'intéresse alors à la CVABS de : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt$.

La CVABS se résume à la CV car $\frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

De plus cette intégrale est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $M > 0$, $\int_0^M \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = [-\ln(1 + e^{-t})]_0^M = \ln 2 - \ln(1 + e^{-M}) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \ln 2$ car $e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, T admet une espérance qui vaut $E(T) = \ln 2$.

Exercice 6. 12-6

On considère de nouveau la var $X \mapsto \varepsilon(1)$. Montrons que X admet un moment d'ordre 2.

X une var suivant la loi exponentielle de paramètre 1, donc d'après le cours : une densité pour X est $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$.

On s'intéresse alors à la CVABS de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$.

La CVABS se résume à la CV car $t^2 e^{-t} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

De plus cette intégrale est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto t^2 e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

On va procéder à une IPP :

On pose $u'(t) = e^{-t}$, $u(t) = -e^{-t}$, $v(t) = t^2$, $v'(t) = 2t$ avec u et v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Alors, $\int_0^M t^2 e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_0^M + 2 \int_0^M t e^{-t} dt = -M^2 e^{-M} + 2(-M e^{-M} + 1 - e^{-M}) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 2$
 car par CC $M^2 e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$, $M e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.
 on réutilise l'IPP de l'exo 12-3

Ainsi, $E(X^2)$ existe et vaut 2.

NB : Si $X \hookrightarrow \epsilon(1)$ alors $V(X)$ existe alors par K-H et vaut $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1 = 1$.

Exercice 7. 12-7

Soit f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Montrons que f est une densité d'une var X .

(a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive : en effet $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} > 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(b) f est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonction usuelle dont le dénominateur ne s'annule et f est continue sur $] -\infty, 1[$ en tant que fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt$.

Cette intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $M > 0$ alors $\int_1^M \frac{2}{t^3} dt = [-\frac{1}{t^2} dt]_1^M = 1 - \frac{1}{M^2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Conclusion : f est une densité de X .

2. Montrons que X possède une espérance.

On s'intéresse alors à la CVABS de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$.

La CVABS se résume à la CV car $\frac{2}{t^2} > 0$ sur $[1, +\infty[$.

De plus cette intégrale est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $M > 1$, $\int_1^M \frac{2}{t^2} dt = [-\frac{2}{t}]_1^M = 2 - \frac{2}{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 2$.

Ainsi, $E(X)$ existe et vaut 2.

3. Montrons que le moment d'ordre 2 n'existe pas.

On s'intéresse alors à la CVABS de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt$.

Or, cette intégrale est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1$).

Donc le moment d'ordre 2 n'existe pas.

Exercice 8. 12-8 Loi du Max

Déterminons la loi du maximum de 2 var indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

$S(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega) = [0, 1]$.

La var $S = \text{Max}(X, Y)$ est définie par : $\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \text{Max}(X(\omega), Y(\omega))$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, [S \leq x] = [X \leq x \cap Y \leq x]$. L'indépendance de X et Y , implique l'égalité suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}, F_S(x) = P(S \leq x) = P([X \leq x] \cap [Y \leq x]) = P([X \leq x])P([Y \leq x]) = F_X(x)F_Y(x) = (F_X(x))^2$ (car X et Y suivent la même loi).

Donc $F_S(x) = P(S \leq x) = (F_X(x))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

NB : S est à densité car sa fonction de répartition F_S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1.

Elle est continue sur $] -\infty, 0[$ en tant que fonction nulle, continue sur $[0, 1]$ car fonction usuelle et continue sur $]1, +\infty[$ car fonction constante.

Etude en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_S(x)$ donc F_S est continue en 0.

Etude en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_S(x)$ donc F_S est continue en 1.

Finalement F_S est continue sur $\mathbb{R}$.

S est bien à densité.

On peut avoir une densité pour S en dérivant F_S partout où cela est possible et en affectant la valeur 0 ailleurs.

Une densité possible pour S est alors : $f_S(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 9. 12-9 Loi du Min

Déterminons la loi du minimum de 2 var indépendantes X et Y suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs a et b (a et b étant des réels strictement positifs).

$T(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

La var $T = \min(X, Y)$ est définie par : $\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, [T > x] = [X > x \cap Y > x]$. L'indépendance de X et Y , implique l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T > x) = P([X > x] \cap [Y > x]) = P([X > x])P([Y > x]) = (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)).$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$.

$$\text{On a donc : } F_T(x) = \begin{cases} 1 - (1 - 0)(1 - 0) = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - (1 - e^{-ax}))(1 - (1 - e^{-bx})) = (1 - e^{-(a+b)x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une var qui suit la loi exponentielle de paramètre $(a + b)$.

Donc $T \hookrightarrow \epsilon(a + b)$.

NB : donc T est à densité!

Exercice 10. 12-10

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité, donnons la loi de Y .

On a $X(\Omega) = [-1, 1]$ donc $Y(\Omega) = [0, 1]$.

$\forall x < 0, P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = 0$

$\forall x \in [0, 1], P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

Or $\forall x \in [0, 1], \sqrt{x} \in [0, 1], -\sqrt{x} \in [-1, 0]$ et comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ on a donc : $F_X(\sqrt{x}) = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$ et $F_X(-\sqrt{x}) = \frac{1-\sqrt{x}}{2}$.

D'où : $\forall x \in [0, 1], P(Y \leq x) = \sqrt{x}$.

$$\forall x > 1, P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

Or, $\forall x > 1, \sqrt{x} > 1$ et $-\sqrt{x} < -1$ donc $F_X(\sqrt{x}) = 1$ et $F_X(-\sqrt{x}) = 0$.

Donc $\forall x > 1, P(Y \leq x) = 1$.

$$\text{Bilan la loi de } Y \text{ est donnée par : } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

NB : On admet que Y est une variable à densité, pour avoir une densité pour Y , on dérive F_Y partout où cela est possible donc à savoir sur $]0, 1[$ et on affecte la valeur 0 ailleurs.

Une densité possible alors pour Y serait : $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 11. 12-11

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, n+1[$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et on admet que Y est une variable aléatoire, reconnaitre la loi de Y .

On a $X(\Omega) = [1, n+1[$ donc $Y(\Omega) = \{1, n\}$ (donc Y est une variable discrète!).

$\forall k \in \{1, n\}, P(Y = k) = P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k) = \frac{k+1-1}{n+1-1} - \frac{k-1}{n+1-1} = \frac{1}{n}$.

On reconnaît alors que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, n\})$.

Exercice 12. 12-12

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\epsilon(\lambda)$. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminons une densité de Y .

On a $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Si $x < 0, P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = 0$

Si $x \geq 0, P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

Or, si $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, $-\sqrt{x} \leq 0$ donc $F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$ et $F_X(-\sqrt{x}) = 0$.

$$\text{Donc finalement : } F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que Y est une variable à densité, pour avoir une densité pour Y , on dérive F_Y partout où cela est possible donc à savoir sur $\mathbb{R}_+^*$ et on affecte la valeur 0 ailleurs.

$$\text{Une densité possible alors pour } Y \text{ serait : } f_Y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13. 12-13

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, 2]$.

On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminons une densité de Y .

On a $X(\Omega) = [1, 2]$ donc $Y(\Omega) = [0, \ln 2]$.

Si $x < 0$, $P(Y \leq x) = 0$.

Si $x \in [0, \ln 2]$, $P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x)$ (car $x \mapsto e^x$ est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

De plus si $x \in [0, \ln 2]$, $e^x \in [1, 2]$.

Donc, si $x \in [0, \ln 2]$, $P(Y \leq x) = F_X(e^x) = \frac{e^x - 1}{2 - 1} = e^x - 1$.

Si $x > \ln 2$, alors $e^x > 2$ donc $P(Y \leq x) = F_X(e^x) = 1$.

$$\text{Bilan : } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$$

On admet que Y est une variable à densité, pour avoir une densité pour Y , on dérive F_Y partout où cela est possible donc à savoir sur $[0, \ln 2]$ et on affecte la valeur 0 ailleurs.

$$\text{Une densité possible alors pour } Y \text{ serait : } f_Y(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 14. 12-14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable à densité, déterminons une densité de Y .

On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Si $x \leq 0$, $P(Y \leq x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \ln x) = \Phi(\ln x)$.

(car $x \mapsto \ln x$ est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\text{Bilan : } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

On admet que Y est une var à densité.

Pour avoir une densité de Y , on dérive F_Y partout où cela est possible (donc sur $\mathbb{R}_+^*$) et on affecte la valeur 0 ailleurs.

$$\text{Une densité possible alors pour } Y \text{ serait : } f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \Phi'(\ln x) = \frac{1}{x} \varphi(\ln x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15. 12-15

Montrons que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors $-X$ suit aussi la loi normale centrée réduite.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On pose $Y = -X$, donc $X(\Omega) = \mathbb{R} = Y(\Omega)$.

Puis, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 16. 12-16

Montrons que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1.$$