Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel *réel* de dimension quelconque (*i.e.* finie ou infinie).

I – Généralités

1) Produit scalaire

Définition (produit scalaire) On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi \in \mathbb{R}^{E\times E}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\star$ φ est une *forme bilinéaire* sur E, *i.e.* :

$$\forall x,y,z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x+\lambda y, z) = \varphi(x,z) + \lambda\varphi(y,z) \qquad \text{(linéarité à gauche)}$$

et :

$$\forall x,y,z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(z, x+\lambda y) = \varphi(z,x) + \lambda\varphi(z,y) \qquad \text{(linéarité à droite)}$$

- $\star$ φ est *symétrique*, *i.e.* :

$$\forall x,y \in E, \qquad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

★ φ est *positive*, *i.e.* :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x,x) \geqslant 0$$

★ φ est *définie*, *i.e.* :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi(x,x) = 0 \implies x = 0_E$$

Notation. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est généralement noté $x \cdot y$, ou $(x \,|\, y)$ ou $\langle x, y \rangle$.

Remarques :

★ Attention à la notion de positivité pour un produit scalaire : dire qu'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ est positif ne signifie pas que l'*application* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs positives.

Exemple On sait que :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x,y),(x',y')\big) & \longmapsto & xx' + yy' \end{array} \right. \tag{$*$}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (il s'agit du produit scalaire étudié en Terminale). On a :

$$\langle (1,1), (0,-1) \rangle = -1 < 0$$

★ Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0$$

Démonstration Soit $x \in E$. On a $\langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle$ par symétrie d'un produit scalaire. De plus :

$$\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \langle x, 0_E \rangle = 0$$

par bilinéarité du produit scalaire. ■

★ Si $\varphi \in \mathbb{R}^{E \times E}$ est une application symétrique et linéaire par rapport à la première variable, alors φ est bilinéaire.

Démonstration Il reste à établir que φ est linéaire par rapport à la deuxième variable. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y, z \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y + \lambda z) &= \varphi(y + \lambda z, x) \qquad (\text{car } \varphi \text{ est symétrique}) \\ &= \varphi(y, x) + \lambda \varphi(z, x) \qquad (\text{car } \varphi \text{ est linéaire par rapport à la première variable}) \\ &= \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z) \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la symétrie de φ. ■

2) Trois exemples

(a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On généralise à $\mathbb{R}^n$ ci-dessous le produit scalaire vu en Terminale dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Proposition/définition (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On appelle *produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array} \right. \tag{PS1}$$

Démonstration Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

- $\star$ Soient $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n), Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle X + \lambda Y, Z \rangle &= \big\langle (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n), (z_1, \dots, z_n) \big\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k) z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k z_k + \lambda y_k z_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \qquad \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \langle X, Z \rangle + \lambda \langle Y, Z \rangle\end{aligned}$$

  Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

- $\star$ Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a pour tous $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}$:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \langle Y, X \rangle$$

  L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc symétrique, et comme elle est linéaire par rapport à la première variable, elle est aussi bilinéaire.

- $\star$ Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle X, X \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$$

  car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $x_k^2 \geqslant 0$ (puisque x_k est un nombre réel) et car une somme de nombres positifs est positive. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive.

- $\star$ Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\langle X, X \rangle = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$. Or :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k^2 = 0$$

  donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k^2 = 0 \qquad i.e. \qquad x_k = 0$$

  Ainsi, $X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Finalement, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. ■

Remarque : en identifiant les éléments de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire peut se réécrire matriciellement comme suit :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle X, Y \rangle = X^{\mathrm{T}} Y$$

En effet :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \qquad X^{\mathrm{T}} Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(b) Produit scalaire intégral sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$

Proposition Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère l'espace vectoriel réel (de dimension infinie) $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right. \tag{PS2}$$

est un produit scalaire sur E.

Démonstration ⋆ Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\langle f+\lambda g, h\rangle = \int_a^b (f+\lambda g)(t)h(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (f(t)+\lambda g(t))h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f(t)h(t)+\lambda g(t)h(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle f,h\rangle + \lambda\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est donc linéaire par rapport à la première variable. Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, cette application est aussi symétrique ; elle est donc bilinéaire.

⋆ Pour tout $f \in E$, on a $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale car la fonction $t \longmapsto f(t)^2$ est continue et positive et car $a \leqslant b$. Ainsi, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est positive.

⋆ Soit $f \in E$ tel que $\langle f, f\rangle = 0$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \longmapsto f(t)^2$ est positive et continue sur $[a,b]$ et on a $a < b$. D'après le théorème de nullité de l'intégrale, la fonction $t \longmapsto f(t)^2$ est nulle sur $[a,b]$, *i.e.* :

$$(\forall t \in [a,b],\ f(t)^2 = 0) \qquad i.e. \qquad (\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0)$$

Autrement dit, $f = 0_E$. Ainsi, l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie.

Finalement, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E. ■

(c) Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition (produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\langle \cdot,\cdot\rangle : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right)\end{array}\right. \tag{PS3}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé *produit scalaire canonique sur* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration ⋆ Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la transposition puis de la trace, on a :

$$\begin{aligned}\langle A+\lambda B, C\rangle = \operatorname{tr}\left((A+\lambda B)^{\mathrm{T}}C\right) = \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}C+\lambda B^{\mathrm{T}}C\right) &= \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}C\right) + \lambda\operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}}C\right) \\ &= \langle A,C\rangle + \lambda\langle B,C\rangle\end{aligned}$$

donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

⋆ De plus, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right) = \operatorname{tr}\left((B^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}\right) &= \operatorname{tr}(B^{\mathrm{T}}A) \qquad \text{(propriété de la trace)} \\ &= \langle B,A\rangle\end{aligned}$$

donc l'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique. On déduit donc du point précédant que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire.

⋆ Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \qquad \text{et} \qquad A^{\mathrm{T}}A = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{i,k}a_{k,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p} = \left(\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$$

donc :

$$\langle A,A\rangle = \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}^2 \geqslant 0$$

car une somme de nombres réels positifs est un nombre positif. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc positive. Si de plus $\langle A, A \rangle = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = 0$. Or, pour tout $(i,k) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a $a_{k,i}^2 \geqslant 0$ donc :

$$(\forall (i,k) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a_{k,i}^2 = 0) \qquad i.e. \qquad (\forall (i,k) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a_{k,i} = 0)$$

Autrement dit, $A = 0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc définie.
Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. ■

Définition (espace préhilbertien, espace euclidien) On appelle *espace préhilbertien réel* la donnée d'un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où :

- ⋆ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- ⋆ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Si de plus E est de dimension finie, alors on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un *espace euclidien*.

Exemple En reprenant les notations des exemples précédents :

- ⋆ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien (de dimension n) ;
- ⋆ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $(\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel ;
- ⋆ pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Remarques :

- ⋆ On dira parfois simplement que « E est un espace préhilbertien réel/euclidien » lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le produit scalaire utilisé.
- ⋆ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel (voire euclidien si F est de dimension finie).

II – Norme associée à un produit scalaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) Définition et exemples

Définition (norme euclidienne) On appelle *norme euclidienne sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$* l'application notée $\| \cdot \|$ suivante :

$$\| \cdot \| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

Remarques :

- ⋆ La positivité du produit scalaire justifie l'existence de la norme.
- ⋆ On a $\|0_E\| = 0$.

Exemple Les normes $\| \cdot \|$ associées aux trois produits scalaires (PS1), (PS2) et (PS3) précédents sont définis par :

- ⋆ $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$;
- ⋆ $\forall f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}$;
- ⋆ $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \|A\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$.

2) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition (vecteurs colinéaires) Soient $x, y \in E$.

- ⋆ Les vecteurs x et y sont dits *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
- ⋆ Les vecteurs x et y sont dits *colinéaires de même sens* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Le vecteur nul 0_E est colinéaire à tous les vecteurs de E (en effet, pour tout $x \in E$, on a $0_E = 0 \cdot x$).

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

et cette inégalité est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration Soient $x, y \in E$. On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $y = 0_E$
  On a alors $\langle x, y\rangle = \langle x, 0_E\rangle = 0$ et $\|y\| = \|0_E\| = 0$. Donc on a bien l'inégalité annoncée ; c'est en fait une égalité, les deux nombres mis en jeu valant 0. De plus, les vecteurs x et $y = 0_E$ sont colinéaires dans ce cas (puisque $y = 0 \cdot x$).
- ⋆ **Deuxième cas :** $y \neq 0_E$
  Considérons la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \geqslant 0$$
  Par symétrie et bilinéarité du produit scalaire, on a :
  $$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle\\ &= \|y\|^2\lambda^2 + 2\langle x, y\rangle\lambda + \|x\|^2\end{aligned}$$
  Ainsi, P est une fonction polynomiale du second degré (comme $y \neq 0_E$, on a $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle > 0$) à coefficients réels qui est à valeurs positives. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire que :
  $$4\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leqslant 0 \qquad \text{soit encore} \qquad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$
  par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Il reste à établir le cas d'égalité pour $y \neq 0_E$. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si le discriminant Δ de P est nul, c'est-à-dire si et seulement si P admet une racine réelle double. Le produit scalaire étant défini, cela revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x + \alpha y = 0$, *i.e.* que x et y sont colinéaires. ■

Remarque : pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, on a donc $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \in [-1, 1]$.

Exemple ⋆ Pour (PS1), l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$$

⋆ Pour (PS2), elle s'écrit :

$$\forall f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}), \qquad \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

⋆ Et pour (PS3) :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B) \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}A)\operatorname{tr}(B^{\mathrm{T}}B)}$$

3) Propriétés de la norme

Proposition (propriétés de la norme) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ est :

⋆ *positive, i.e.* :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| \geqslant 0$$

⋆ *définie, i.e.* :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0_E$$

⋆ *homogène, i.e.* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E, \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

⋆ *vérifie l'inégalité triangulaire, i.e.* :

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$ (*i.e.* si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires de même sens).

Démonstration Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$$

par positivité de la fonction racine carrée et :

$$\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_E$$

car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini. De plus, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$$

Il reste à établir la quatrième propriété. Soient $x, y \in E$.

⋆ Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \qquad (\text{car : } \forall t \in \mathbb{R},\ t \leqslant |t|) \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \qquad (\text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \quad (1) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, on conclut bien que $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Traitons maintenant le cas d'égalité en raisonnant par double implication.

— Supposons maintenant que $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. Alors on a aussi $\|x+y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$. L'inégalité (1) est donc une égalité ; ainsi, on a $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Par conséquent, nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : les vecteurs x et y sont colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ ou $y = \lambda x$. Comme les vecteurs x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer (sans perte de généralité) que $y = \lambda x$. Il s'agit de montrer que $\lambda \geqslant 0$. L'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ se réécrit :

$$|1+\lambda|\,\|x\| = (1+|\lambda|)\|x\| \qquad \text{soit encore} \qquad (|1+\lambda| - 1 - |\lambda|)\|x\| = 0$$

On a donc $|1+\lambda| = 1+|\lambda|$ ou $\|x\| = 0$ (*i.e.* $x = 0_E$). Dans le deuxième cas, les vecteurs x et y sont bien colinéaires dans le même sens car $x = 0 \cdot y$. La première égalité implique que :

$$(1+\lambda)^2 = (1+|\lambda|)^2 \qquad i.e. \qquad 1+2\lambda+\lambda^2 = 1+2|\lambda|+\lambda^2,$$

soit encore $\lambda = |\lambda|$. On a donc bien $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Le cas d'égalité est donc établi. ■

Remarque : pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration Soient $x, y \in E$. D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme, on a :

$$\|x-y\| = \|x+(-y)\| \leqslant \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \underbrace{|-1|}_{=1}\,\|y\|,$$

ce qu'il fallait établir. ■

Proposition (deuxième partie de l'inégalité triangulaire) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration Soient $x, y \in E$. Il reste à démontrer l'inégalité de gauche. On a :

$$x = (x-y)+y \qquad \text{donc} \qquad \|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

d'après l'inégalité triangulaire. De la même manière :

$$\|y\| = \|x-(x-y)\| \leqslant \|x\| + \|x-y\|$$

Ces deux inégalités impliquent que :

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\| \qquad i.e. \qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

On a aussi (en remplaçant y par $-y$ dans la dernière inégalité) :

$$\big|\|x\| - \|-y\|\big| \leqslant \|x-(-y)\| \qquad i.e. \qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\|$$

L'inégalité de gauche est donc établie. ■

Définition (vecteur unitaire) Un vecteur x de E est dit *unitaire* s'il est de norme 1, c'est-à-dire si $\|x\| = 1$.

Remarque : si x est un vecteur non nul de E, alors il existe exactement deux vecteurs colinéaires à x et unitaires. Il s'agit des vecteurs $x_- = \dfrac{-1}{\|x\|}x$ et $x_+ = \dfrac{1}{\|x\|}x$.

Démonstration Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.

- ⋆ Les vecteurs $x_\pm$ sont bien définis car $\|x\| > 0$ (la norme étant définie et car $x \neq 0_E$) et ils sont unitaires car :
$$\|x_\pm\| = \left|\frac{\pm 1}{\|x\|}\right| \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$$
- ⋆ Soit $y \in E$ un vecteur unitaire et colinéaire à x. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$. Comme x et y sont non nuls, on peut supposer, quitte à multiplier par $\frac{1}{\lambda}$ (on a nécessairement $\lambda \neq 0$) que $y = \lambda x$. Par homogénéité de la norme, il vient :
$$1 = \|y\| = |\lambda| \, \|x\|$$
Ainsi, $\lambda = \pm \dfrac{1}{\|x\|}$. ■

Exemple ⋆ Dans $\mathbb{R}^3$ (muni de (PS1)), $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ est unitaire.

- ⋆ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de (PS3)), $\dfrac{1}{\sqrt{n}} I_n$ est un vecteur unitaire.
- ⋆ Dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, le vecteur $f : t \longmapsto \sqrt{2n+1}\, t^n$ est unitaire (pour (PS2)).

4) Distance euclidienne

On peut définir la distance entre deux vecteurs à partir de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur l'espace préhilbertien réel E.

Définition (distance euclidienne) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel (de norme associée $\|\cdot\|$). On appelle *distance euclidienne* sur E l'application :
$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$$

Remarque : dans $\mathbb{R}^2$ (muni de (PS1)), on retrouve la distance usuelle. En effet, si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors :
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Les propriétés d'une distance sont les suivantes.

Proposition Soit d la distance euclidienne sur l'espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. L'application d est :

- ⋆ *positive, i.e.* :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x, y) \geqslant 0$$
- ⋆ *définie, i.e.* :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$$
- ⋆ *symétrique, i.e.* :
$$\forall x, y \in E, \qquad d(x, y) = d(y, x)$$
- ⋆ vérifie l'*inégalité triangulaire, i.e.* :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

Démonstration Les trois premières propriétés sont immédiates. Pour tous $x, y, z \in E$, on a (en utilisant l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme) :

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z),$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

✎✎✎ **Exercice** Calculer $d(f,g)$, où $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x^2$, dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire (PS2).

5) Formulaire

Les formules suivantes sont très utiles en pratique.

Proposition (formulaire) Soient $x, y \in E$.

- ⋆ **Identités remarquables :**

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

- ⋆ **Formules de polarisation :**

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

- ⋆ **Identité du parallélogramme :**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration Soient $x, y \in E$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Les trois autres formules s'en déduisent. ∎

III – Orthogonalité

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) Vecteurs orthogonaux

Définition (vecteurs orthogonaux) Soient $x, y \in E$. On dit que les vecteurs x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$, si $\langle x,y\rangle = 0$.

Exemple
- ⋆ Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire canonique).
- ⋆ Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sont orthogonales dans $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire (PS2), mais pas dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Remarques :

- ⋆ Pour tout $x \in E$, on a $x \perp 0_E$.
- ⋆ Soit $x \in E$. Si $x \perp x$, alors $x = 0_E$.

  Démonstration Soit $x \in E$. Si $x \perp x$, alors $\langle x, x\rangle$ et donc $x = 0_E$ car le produit scalaire est défini.■

Définition (famille orthogonale de vecteurs) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

- ⋆ On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est *orthogonale* si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i \neq j \implies x_i \perp x_j$$

- ⋆ Si les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont de plus unitaires, on dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est *orthonormée* (ou *orthonormale*).

Remarque : une famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est donc orthonormée si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad \langle x_i, x_k\rangle = \delta_{i,j}$$

Exemple ⋆ La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire canonique (PS1).

⋆ Dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ (muni de (PS2)), la famille (f, g, h), où :

$$f : x \longmapsto 1, \qquad g : x \longmapsto x - \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad h : x \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12},$$

est orthogonale.

✎✎✎ **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère la fonction $c_k : x \longmapsto \cos(kx)$. Montrer que la famille $(c_0, \dots, c_n)$ est orthogonale dans $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ (muni du produit scalaire (PS2)).

Proposition (liberté et orthogonalité) Dans un espace préhilbertien réel, toute famille orthogonale constituée de vecteurs *non nuls* est libre.

Remarque : si le vecteur nul fait partie des vecteurs de la famille, alors celle-ci est liée.

Démonstration Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ et fixons $\ell \in [\![1, n]\!]$. Montrons que $\lambda_\ell = 0$. On a :

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0_E, x_\ell\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_\ell\rangle \qquad \text{(bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= \lambda_\ell \|x_\ell\|^2 \qquad \text{(par hypothèse sur la famille)} \end{aligned}$$

Comme $x_\ell \neq 0_E$, on a $\|x_\ell\|^2 \neq 0$ (la norme étant définie), ce qui implique que $\lambda_\ell = 0$. ■

Théorème (de Pythagore) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale. Alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Démonstration Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\langle x_k, x_\ell \rangle}_{=0 \text{ si } \ell \neq k} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

par hypothèse sur la famille. ■

Remarque : dans le cas où $n = 2$, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie. En effet, pour tous $x, y \in E$ tels que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, on a (en utilisant l'identité remarquable) $2\langle x, y \rangle = 0$, c'est-à-dire $x \perp y$.

2) Orthogonal d'une partie de E

Définition (orthogonal d'une partie) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On appelle *orthogonal de* A, noté $A^\perp$, le sous-ensemble de E suivant :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall a \in A,\ x \perp a \right\}$$

Remarques :

- ⋆ L'orthogonal de A est donc l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous ceux de A.
- ⋆ On a $0_E \in A^\perp$.

Les propriétés de l'orthogonal d'une partie sont les suivantes.

Proposition (propriétés de l'orthogonal) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- ⋆ $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$;
- ⋆ $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- ⋆ $A \subset (A^\perp)^\perp \overset{\text{noté}}{=} A^{\perp\perp}$;
- ⋆ si A est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $(a_i)_{i \in I}$, alors :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall i \in I,\ x \perp a_i \right\}$$

- ⋆ si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A et $A^\perp$ sont en somme directe dans E, *i.e.* $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

- ⋆ Montrons que $E^\perp = \{0_E\}$ en raisonnant par double inclusion.
  - On a $0_E \in E^\perp$ (car pour tout $x \in E$, on sait que $0_E \perp x$) donc $\{0_E\} \subset E^\perp$.

— Soit maintenant $x \in E^{\perp}$. Alors en particulier $x \perp x$ (puisque $x \in E$). On a alors $x = 0_E$ (la norme étant définie). On a donc l'inclusion réciproque $E^{\perp} \subset \{0_E\}$.

Ainsi, $E^{\perp} = \{0_E\}$. Montrons maintenant que $\{0_E\}^{\perp} = E$.

— L'inclusion $\{0_E\}^{\perp} \subset E$ est évidente.

— Pour tout $x \in E$, on a $x \perp 0_E$ donc $E \subset \{0_E\}$.

Par double inclusion, on a bien $\{0_E\}^{\perp} = E$.

⋆ Il est clair que $A^{\perp}$ est un sous-ensemble de E qui contient 0_E. Vérifions maintenant que $A^{\perp}$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in A^{\perp}$. Pour tout $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, a\rangle &= \langle x, a\rangle + \lambda\langle y, a\rangle \qquad \text{(bilinéarité du produit scalaire)} \\ &= 0 + \lambda \times 0 \qquad \text{(car } x \perp a \text{ et } y \perp a \text{ par définition de } x \text{ et de } y\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x + \lambda y \in A^{\perp}$. On conclut donc que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

⋆ Soit $x \in A$. Montrons que $x \in (A^{\perp})^{\perp}$. Soit $y \in A^{\perp}$. Par définition de $A^{\perp}$, on a $x \perp y$ et donc $x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

⋆ Posons $B = \big\{x \in E \,\big|\, \forall i \in I,\ x \perp a_i\big\}$ et montrons que $A^{\perp} = B$ en raisonnant par double inclusion.

— Soit $x \in A^{\perp}$. Pour tout $a \in A$, on a $x \perp a$. Pour tout $i \in I$, comme $a_i \in A$, on a en particulier $x \perp a_i$. Ainsi, $x \in B$. D'où l'inclusion $A^{\perp} \subset B$.

— Soit $x \in B$. Montrons que $x \in A^{\perp}$. Soit $a \in A = \mathrm{Vect}(a_i)_{i \in I}$. Il existe une famille (presque nulle) $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, a\rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x, a_i\rangle &= \sum_{i \in I} \lambda_i \times 0 \qquad \text{(car } x \in B\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in A^{\perp}$. On a donc l'inclusion $B \subset A^{\perp}$.

Par double inclusion, on peut conclure que $A^{\perp} = B$.

⋆ Supposons que A soit un sous-espace vectoriel de E.

— On sait aussi que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\{0_E\} \subset A \cap A^{\perp}$.

— Soit maintenant $x \in A \cap A^{\perp}$, alors $x \perp x$ ce qui implique que $x = 0_E$ (puisque le produit scalaire est défini). On a donc l'inclusion réciproque $A \cap A^{\perp} \subset \{0_E\}$.

Ainsi, $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique (PS1), l'orthogonal du plan vectoriel :

$$P = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x + y + z = 0\big\}$$

est la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$.

Démonstration Commençons par déterminer une famille génératrice de P.

⋆ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in P \iff z = -x - y &\iff (x, y, z) = (x, y, -x - y) \\ &\iff (x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \end{aligned}$$

Ainsi, $P = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big)$.

⋆ Déterminons maintenant $P^{\perp}$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in P^{\perp} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \perp (1, 0, -1) \\ (x, y, z) \perp (0, 1, -1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \langle (x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P^{\perp} = \big\{(x, x, x) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big) = D,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

3) Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

L'algorithme suivant permet de transformer une base d'un espace euclidien en une base orthogonale (*i.e.* en une base de l'espace qui est aussi une famille orthogonale).

Théorème (algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) Soient E un espace euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit la famille $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs de E par :

- ⋆ $u_1 = e_1$;
- ⋆ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, on pose $u_k = e_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i$.

Alors :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$$

et la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une base orthogonale de E.

Démonstration Montrons par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ que :

(*i*) $\|u_k\| \neq 0$;

(*ii*) $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$;

(*iii*) $u_k \in \{u_1,\dots,u_{k-1}\}^\perp$ si $k \geqslant 2$.

- ⋆ Comme $e_1 \neq 0_E$, on a $\|u_1\| = \|e_1\| \neq 0$ (la norme étant définie). Les assertions (*ii*) et (*iii*) sont évidentes.
- ⋆ Supposons maintenant que la proposition soit vraie au rang $k \in [\![1,n-1]\!]$. Par définition du vecteur u_{k+1}, la proposition (*ii*) est vérifiée. Vérifions maintenant la condition d'orthogonalité (*iii*). Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\langle u_{k+1}, u_j\rangle = \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle &= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_k\rangle}{\|u_i\|^2} \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{=0 \text{ si } i\neq j} \\ &= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \frac{\langle e_{k+1}, u_j\rangle}{\|u_j\|^2}\|u_j\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

  ce qui démontre (*iii*). Si $\|u_{k+1}\| = 0$, alors $u_{k+1} = 0_E$, ce qui implique que :

$$e_{k+1} \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$$

  Ceci contredit la liberté de la famille $(e_1,\dots,e_n)$. Donc $\|u_{k+1}\| \neq 0$.

Ceci achève la récurrence. Remarquons alors que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est orthogonale d'après (*iii*) et est une base de E. En effet, les vecteurs de la famille sont tous non nuls (ce qui entraîne la liberté de la famille) et elle est constituée de $n = \dim(E)$ vecteurs. ■

✎✎✎ **Exercice** Orthogonaliser la famille :

$$\mathscr{B} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,2,3)\big)$$

Corollaire Dans un espace euclidien, il existe une base orthonormée.

Démonstration Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que E admet une base (d'après le théorème de la base incomplète).

- ⋆ L'algorithme de Gram-Schmidt permet d'obtenir, à partir de cette base, une base orthogonale $(u_1,\dots,u_n)$ de E.

⋆ Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont nécessairement non nuls (puisque la famille est une base) donc la famille :

$$\left(\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \dots, \frac{1}{\|u_n\|}u_n\right)$$

est une base orthonormée de E. ■

Lorsque l'on dispose d'une base orthonormée, les calculs de normes et de produits scalaires sont très simples.

Proposition (calculs dans une base orthonormée) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $x, y \in E$. Alors :

⋆ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$, *i.e.* $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle$;

⋆ $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$;

⋆ $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle)^2 \right)^{1/2}$.

Démonstration ⋆ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell^*(x) e_\ell, e_k \right\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell^*(x) \underbrace{\langle e_\ell, e_k \rangle}_{=\delta_{\ell,k}} = e_k^*(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

⋆ En utilisant à nouveau la bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_\ell \rangle \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{=\delta_{k,\ell}} = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

⋆ Il suffit de choisir $y = x$ dans le point précédent. ■

Exemple On se place dans $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (PS2). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right.$. On sait que $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille orthonormale. On en déduit que :

⋆ pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, on a $\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell f_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$

⋆ pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on a $\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \right\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \right)^{1/2}$, *i.e.* :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right)^2 \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

IV – Projecteur orthogonal

Dans toute cette section, on considère un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de distance euclidienne notée d.

1) Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sous-ensemble de E, on rappelle que l'orthogonal $F^\perp$ de F est défini par :

$$F^\perp = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall f \in F,\ x \perp f \right\}$$

Notation : si F et G sont deux sous-ensembles de E, on écrira $F \perp G$ pour dire que :

$$\forall (f, g) \in F \times G, \qquad f \perp g$$

Par exemple, si F est un sous-espace vectoriel de E, on sait que $F \perp F^\perp$.

Théorème Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On a les propriétés suivantes :

- ⋆ $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ (*i.e.* $E = F \oplus F^\perp$ et $F \perp F^\perp$) ;
  On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.
- ⋆ $F^{\perp\perp} = F$;
- ⋆ Si E est un espace euclidien (*i.e.* si E est de dimension finie), alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration ⋆ Par définition de $F^\perp$, on a $F \perp F^\perp$ et l'égalité $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Montrons maintenant l'égalité $F + F^\perp = E$.

— L'inclusion $F + F^\perp \subset E$ est évidente (par structure d'espace vectoriel de E).

— Pour montrer l'inclusion réciproque $E \subset F + F^\perp$, considérons une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Soit $x \in E$. On peut écrire que :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k \right)}_{\text{noté } g}$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a (par bilinéarité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle g, f_k \rangle &= \langle x, f_k \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \langle x, f_\ell \rangle \underbrace{\langle f_k, f_\ell \rangle}_{=\delta_{k,\ell}} \\ &= \langle x, f_k \rangle - \langle x, f_k \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $g \in F^\perp$. Par conséquent, $x \in F + F^\perp$. Ainsi, $E \subset F + F^\perp$.

On a donc l'égalité $E = F + F^\perp$, et finalement, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

⋆ On sait que $F \subset F^{\perp\perp}$. Soit $x \in F^{\perp\perp}$. Montrons que $x \in F$. Comme $x \in E = F + F^\perp$, il existe $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$. Or $x \in F^{\perp\perp}$ donc $x \perp x_{F^\perp}$. Ainsi :

$$0 = \langle x, x_{F^\perp} \rangle = \langle x_F, x_{F^\perp} \rangle + \langle x_{F^\perp}, x_{F^\perp} \rangle$$

Comme $F \perp F^\perp$, on a aussi $\langle x_F, x_{F^\perp} \rangle = 0$. Il reste $\langle x_{F^\perp}, x_{F^\perp} \rangle = 0$ et donc $x_{F^\perp} = 0_E$ (car le produit scalaire est défini). On a donc $x = x_F \in F$. Ceci démontre l'inclusion $F^{\perp\perp} \subset F$. Par double inclusion, on a donc $F^{\perp\perp} = F$.

⋆ Si E est de dimension finie, alors $F^\perp$ l'est également (en tant que sous-espace vectoriel de E). La formule sur les dimensions est alors une conséquence immédiate du premier point. ∎

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique), le supplémentaire orthogonal de la droite $D = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ est le plan vectoriel P d'équation cartésienne $x+y+z=0$.

Démonstration On a vu précédemment que $P^\perp = D$. Par conséquent, $D^\perp = P^{\perp\perp} = P$. ∎

Corollaire (théorème de la base orthonormée incomplète) Dans un espace euclidien, toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.

Démonstration Supposons que E soit un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ (où $p \in [\![1,n]\!]$). Posons alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Comme $(F^\perp, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien, on peut en considérer une base orthonormée $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On sait que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ donc la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. ∎

2) Projecteur orthogonal

Définition (projecteur orthogonal) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *projecteur orthogonal* sur F le projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ sur F parallèlement à $F^\perp$.

Le résultat suivant permet de calculer un projeté orthogonal, dès lors que l'on dispose d'une base orthonormée de l'espace vectoriel F sur lequel on projette.

Théorème (expression orthogonal d'un projecteur orthogonal) Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormée de F. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k\rangle u_k$$

Démonstration Soit $x \in E$. Alors :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k\rangle u_k + \left(x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k\rangle u_k \right)$$

est la décomposition de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$. Par définition du projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$, on a bien $p(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k\rangle u_k$. ∎

Exemple L'expression analytique du projecteur orthogonal $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ sur le plan :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z\right\}$$

est :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(-2x+y+z, x-2y+z, x+y-2z) \end{array} \right.$$

Démonstration On a vu précédemment qu'une base de F est $\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)$.

- ⋆ Déduisons-en une base orthonormale de F. On pose $u_1=(1,0,-1)$. Soit encore :

$$\begin{aligned}u_2=(0,1,-1)-\frac{\langle(0,1,-1)(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)&=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)\\&=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

D'après l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, la famille (u_1,u_2) est une base orthogonale de F. En posant :

$$U_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\qquad\text{et}\qquad U_2=\frac{1}{\|u_2\|}u_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right),$$

la famille (U_1,U_2) est une base orthonormale de F.

- ⋆ Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On sait que :

$$\begin{aligned}p(X)&=\langle X,U_1\rangle U_1+\langle X,U_2\rangle U_2\\&=\frac{1}{2}\langle(x,y,z),(1,0,-1)\rangle(1,0,-1)+\frac{2}{3}\left\langle(x,y,z),\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\right\rangle\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(x-z)(1,0,-1)+\frac{1}{3}(-x+2y-z)\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{2}+\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6},-\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{3},-\frac{x}{2}+\frac{z}{2}+\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)\\&=\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}-\frac{z}{3},-\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{3},-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{2z}{3}\right),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarques :

- ⋆ Si $(v_1,\dots,v_p)$ est une base *orthogonale* de F, alors :

$$\forall x\in E,\qquad p(x)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\langle x,v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k$$

car $\left(\frac{1}{\|v_1\|^2}v_1,\dots,\frac{1}{\|v_p\|^2}v_p\right)$ est alors une base orthonormée de F.

- ⋆ Si p est le projecteur orthogonal sur F, alors Id_E-p est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

Corollaire (projecteur orthogonal sur une droite ou sur un hyperplan de E) Soit $u\in E\setminus\{0_E\}$. On note D la droite vectorielle de E dirigée par le vecteur u.

- ⋆ Le projecteur orthogonal p sur D a pour expression analytique :

$$\forall x\in E,\qquad p(x)=\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$$

- ⋆ Si q désigne le projecteur orthogonal sur l'hyperplan $H=D^\perp$ de E, alors :

$$\forall x\in E,\qquad q(x)=x-\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$$

Démonstration Il est clair que $\left(\frac{1}{\|u\|}u\right)$ est une base orthonormée de D. D'après le théorème précédent, on sait que :

$$\forall x\in E,\qquad p(x)=\left\langle x,\frac{1}{\|u\|}u\right\rangle\frac{1}{\|u\|}u=\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$$

Le deuxième point découle de l'égalité $p+q=\mathrm{Id}_E$. ■

3) Distance à un sous-espace vectoriel de E

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. L'ensemble :

$$\mathscr{E}_x = \left\{ d(x,y) \,\middle|\, y \in F \right\} = \left\{ \|x-y\| \,\middle|\, y \in F \right\}$$

est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car elle contient $d(x,0) = \|x\|$) et est minoré par 0 (par positivité de d). Cet ensemble admet donc une borne inférieure (qui appartient à $\mathbb{R}_+$) d'après la propriété de la borne inférieure.

Définition (distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On appelle distance de x à F, notée $d(x,F)$, la borne inférieure suivante :

$$\begin{aligned} d(x,F) = \inf \left\{ d(x,y) \,\middle|\, y \in F \right\} &= \inf \left\{ \|x-y\| \,\middle|\, y \in F \right\} \\ &\overset{\text{noté}}{=} \inf_{y \in F} \|x-y\| \end{aligned}$$

Remarque : pour tout $x \in F$, alors $d(x,F) = 0$.

Démonstration Soit $x \in F$. On a $d(x,x) = 0$ donc, par définition de $d(x,F)$, on a l'inégalité $d(x,F) \leqslant d(x,x)$, *i.e.* $d(x,F) \leqslant 0$. Comme par ailleurs $d(x,F) \geqslant 0$, on obtient bien $d(x,F) = 0$ par antisymétrie de la relation $\leqslant$. ■

Théorème (de la projection orthogonale) Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. En notant p le projecteur orthogonal sur F, on a :

$$\forall y \in F, \qquad d(x,y) \geqslant d(x,p(x))$$

avec égalité si et seulement si $y = p(x)$. En particulier :

$$d(x,F) = \|x - p(x)\|$$

Démonstration

- ⋆ Soit $y \in F$. On a :

$$d(x,y)^2 = \|x-y\|^2 = \|(x-p(x)) + (p(x)-y)\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y\|^2$$

  d'après le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $y - p(x)$ et $p(x) - x$ (par définition de p, on a $x - p(x) \in F^\perp$ et $p(x) - y \in F$). Autrement dit :

$$d(x,y)^2 = d(y,p(x))^2 + d(x,p(x))^2 \geqslant d(x,p(x))^2$$

  Cette inégalité est une égalité si et seulement si $d(y,p(x)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $y = p(x)$.
- ⋆ On a $\|x-p(x)\| \in \left\{ \|x-y\| \,\middle|\, y \in F \right\}$ (car $p(x) \in F$) donc, par définition de la borne inférieure, on a l'inégalité $d(x,F) \geqslant \|x-p(x)\|$. Par ailleurs, on sait d'après le premier point que :

$$\forall y \in F, \qquad \|x-p(x)\| \leqslant \|x-y\|$$

  donc, par définition de $d(x,F)$, on a aussi $d(x,F) \leqslant \|x-p(x)\|$. Par antisymétrie de la relation $\leqslant$, il vient $d(x,F) = \|x-p(x)\|$. ■

Remarques :

- ⋆ Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F est donc l'unique vecteur minimisant la distance de x à F.
- ⋆ La borne inférieure étant atteinte, on peut aussi écrire :

$$\forall x \in E, \qquad d(x,F) = \|x-p(x)\| = \min_{y \in F} \|x-y\|$$

4) Cas particulier : distance à un hyperplan

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.

Définition (vecteur normal à un hyperplan) Soit H un hyperplan de E. On appelle *vecteur normal à H* tout vecteur directeur de la droite $H^\perp$.

Exemple Si P est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne est $x - 2y + z = 0$. Alors :

$$\mathbb{R}^3 = P \overset{\perp}{\oplus} D \qquad \text{où} \qquad D = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 1)\big)$$

Un vecteur normal à l'hyperplan P de $\mathbb{R}^3$ est donc $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Corollaire (distance à un hyperplan) Soient H un hyperplan de E et $n \in E$ un vecteur normal à H. On pose $D = H^\perp = \mathrm{Vect}(n)$. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad d(x, D) = \left\| x - \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n \right\| \qquad \text{et} \qquad d(x, H) = \frac{|\langle x, n\rangle|}{\|n\|}$$

Démonstration Soit $x \in E$.

- ⋆ Comme $\left(\dfrac{1}{\|n\|} n\right)$ est une base orthonormée de D, on a en notant p le projecteur orthogonal sur D :

$$p(x) = \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n$$

D'après le théorème de la projection orthogonal, on a bien $d(x, D) = \left\| x - \dfrac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n \right\|$.

- ⋆ Le projecteur orthogonal q sur H est tel que $q = \mathrm{Id} - p$ donc :

$$\begin{aligned} d(x, H) = \|x - q(x)\| = \|p(x)\| = \left\| \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n \right\| &= \left| \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} \right| \|n\| \\ &= \frac{|\langle x, n\rangle|}{\|n\|}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■