Séries numériques

Table des matières

I – Généralités

Dans toute cette section, on considère une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. À partir de celle-ci, on construit une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = u_0, \qquad S_1 = u_0 + u_1, \qquad S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \qquad S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

et, plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, nous allons déterminer des conditions nécessaires ou suffisantes sur la suite sous-jacente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1) Notion de série

Définition (série numérique) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- ⋆ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général* u_n. On notera cet objet $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou, plus simplement, $\sum u_n$.
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que S_n est la *somme partielle d'indice* n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarques :

- ⋆ Une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas une somme, mais une suite de sommes.
- ⋆ Il est possible de considérer des séries dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Il s'agira alors de la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ qui correspond à la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!], \qquad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

✎✎✎ **Exercice** Calculer les sommes partielles S_n pour les séries :

$$\sum_{n\geqslant 0} 1, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 3^n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 3^{-n}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

2) Nature d'une série

Définition (nature d'une série) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite *convergente* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans le cas contraire, on dit que la série est *divergente*.
- ⋆ Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, on appelle *somme de la série*, que l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, le nombre complexe défini par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- ⋆ Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence.

Remarque : attention à ne pas confondre les objets « $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ » et « $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ». Le premier désigne la série (qui est une suite de sommes), le second n'existe que si la série converge, et il s'agit dans ce cas d'un nombre (réel ou) complexe).

Exemple On reprend l'exemple précédent.

- La série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ est divergente car :

$$S_n = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- La série $\sum_{n\geqslant 0} 3^n$ est divergente car :

$$S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- La série $\sum_{n\geqslant 0} 3^{-n}$ est convergente car :

$$S_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$$

car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. De plus, la somme de la série vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{3}{2}$.

- La série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ est divergente car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente (les deux suites extraites de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant des limites différentes).

- La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente car :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et la somme de la série vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente car :

$$S_n = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

3) Cas de divergence grossière

Proposition (condition nécessaire de convergence pour une série) ⋆ Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- ⋆ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente de limite 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente. On dit dans ce cas que la série diverge *grossièrement*.
- ⋆ La réciproque du premier point est fausse.

Démonstration Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

- ⋆ Par hypothèse, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; notons $\ell \in \mathbb{C}$ sa limite. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

  d'après la relation de Chasles. Comme $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on a bien :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$$

- ⋆ Le deuxième point est la forme contraposée du premier point.
- ⋆ On sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente bien que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

Exemple ⋆ Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. Par continuité en 0 de la fonction cosinus (et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité), on a :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0) = 1 \neq 0$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est donc (grossièrement) divergente.

- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ est (grossièrement) divergente.

4) Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes

Proposition Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

- ⋆ la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$ est convergente ;
- ⋆ la somme de cette série est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \qquad \textit{(propriété de linéarité de la somme)}$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de la somme :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k = S_n + \lambda T_n$$

Par hypothèse, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent de limites respectives $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \in \mathbb{C}$. Une combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

Remarques :

- ⋆ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est divergente.

  Démonstration Par l'absurde, supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge. On sait aussi que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge donc, comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, la série $\sum_{n\geqslant 0} \big((u_n + v_n) - u_n\big)$, *i.e.* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, est convergente, ce qui est absurde. ■

- ⋆ Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors on ne peut $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ peut converger ou diverger.

  Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = v_n = \dfrac{1}{n}$ et $w_n = -\dfrac{1}{n}$. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ sont divergentes. La série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + w_n)$ (appelée *série nulle*) est convergente (de somme 0) tandis que la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_n + v_n)$ est divergente. ■

5) Restes d'une série convergente

Définition (suite des restes) Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste d'indice* n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ le nombre réel noté R_n défini par :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n,$$

où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la somme d'indice n de la série.

Proposition (convergence de $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors :

$$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ étant convergente, on a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, d'où le résultat. ■

6) Lien suite-série

Proposition (série télescopique) Soit $(u_n)_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ⋆ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ;
- ⋆ la série (dite *télescopique*) $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.

En cas de convergence, on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0$$

Démonstration Pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0$$

donc :

$$\begin{aligned}
\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(u_{k+1}-u_k) \text{ converge } &\iff \text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \text{la suite } (u_{n+1}-u_0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \text{la suite } (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}
\end{aligned}$$

et, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_0) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

✎✎✎ **Exercice** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ converge et calculer sa somme.

Justification.

⋆ **Première méthode.** Le terme général s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+1)+1}$$

La série est donc télescopique et $\dfrac{1}{3n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge de somme :

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)+1} = 1$$

⋆ **Deuxième méthode.** Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1} \right) = 1 - \frac{1}{3n+4} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. La série est donc convergente de somme égale à 1.

7) Séries usuelles

(a) Séries télescopiques

cf. paragraphe précédent

(b) Séries géométriques

Proposition (séries géométriques) Soit $z \in \mathbb{C}$. La série (dite *géométrique de paramètre* z) $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. On distingue deux cas.

⋆ **Premier cas :** $|z| \geqslant 1$
Dans ce cas, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|z^n| \geqslant 1$), donc la série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ diverge (grossièrement).

⋆ **Deuxième cas :** $|z| < 1$
En particulier, $z \neq 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Comme $|z| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-z}$$

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge donc de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

(c) Séries exponentielles

Proposition (séries exponentielles) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série (dite *exponentielle*) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente de somme e^{z} :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^{z}$$

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. La démonstration de ce résultat repose sur l'inégalité de Taylor-Lagrange dont nous rappelons ci-dessous l'énoncé.

Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in [\min(a,b), \max(a,b)]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{tz} \end{array} \right.$ entre les points 0 et 1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout entier naturel n, on a :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in [0,1]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)} : t \longmapsto z^k \mathrm{e}^{tz}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \mathrm{e}^{z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{t \in [0,1]} \left| z^{n+1} \mathrm{e}^{tz} \right|$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \left| z^{n+1} \mathrm{e}^{tz} \right| = |z|^{n+1} \left| \mathrm{e}^{tz} \right| = |z|^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(tz)} &\leqslant |z|^{n+1} \mathrm{e}^{|tz|} \\ &= |z|^{n+1} \mathrm{e}^{|t|\,|z|} \\ &\leqslant |z|^{n+1} \mathrm{e}^{|z|} \end{aligned}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \mathrm{e}^{z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|z|}$$

Par croissances comparées, on sait que $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|z|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc :

$$\left| \mathrm{e}^{z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{ce qui implique que} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{z}$$

Autrement dit, la série exponentielle de paramètre z converge de somme e^{z}. ■

(d) Séries de Riemann

Le résultat suivant sera démontré ultérieurement.

Proposition (séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (appelée *série de Riemann de paramètre* α) est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple ⋆ La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ (aussi appelée *série harmonique*) est divergente.

⋆ La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

II – Séries alternées

On appelle série alternée toute série de la forme $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs réelles positives.

Exemple Les séries $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n n$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sont alternées.

Le résultat suivant fournit un critère de convergence pour une telle série.

Théorème (critère spécial des séries alternées) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs de limite 0. Alors :

- ⋆ la série alternée $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge ;
- ⋆ si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des restes de la série, alors pour tout entier naturel n, le reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et on a la majoration $|R_n| \leqslant u_{n+1}$;
- ⋆ la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ de la série est telle que $0 \leqslant S \leqslant u_0$.

Démonstration On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$. Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

car u est décroissante. De la même manière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$$

Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante tandis que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

⋆ De plus :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car la suite u est convergente de limite 0.

On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limite commune (propriété sur les suites adjacentes). D'après le théorème sur les suites extraites, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

⋆ Le caractère adjacent des suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ implique que (en notant S la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \tag{$*$}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$$

et le premier terme de la somme R_{2n} vaut $(-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \leqslant 0$ donc R_{2n} est bien du signe de $(-1)^{2n+1}$. De plus :

$$\begin{aligned} |R_{2n}| = |\underbrace{S - S_{2n}}_{\leqslant 0}| &= S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} \qquad \text{(d'après } (*)\text{)} \\ &= u_{2n+1} \end{aligned}$$

- De la même manière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après $(*)$:

$$R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geqslant 0,$$

donc R_{2n+1} est bien du signe de $(-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2} \geqslant 0$ et :

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$$

- Enfin, pour encadrer la somme S, on utilise $(*)$ avec $n = 0$:

$$S_1 \leqslant S \leqslant S_0 \qquad \textit{i.e.} \qquad 0 \leqslant u_0 - u_1 \leqslant S \leqslant u_0,$$

l'inégalité de gauche découlant de la décroissance de u. ■

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série (appelée *série de Riemann alternée*) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

- **Premier cas :** $\alpha \leqslant 0$
  Dans ce cas, la suite $\displaystyle\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n \geqslant 1}$ n'est pas convergente de limite 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).
- **Deuxième cas :** $\alpha > 0$
  La suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geqslant 1}$ est ici positive, décroissante de limite 0. Le théorème sur les séries alternées assure donc la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. ■

III – Séries à termes positifs

Définition (série à termes positifs) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est dite *à termes positifs* si pour tout entier naturel n, on a $u_n \in \mathbb{R}_+$.

1) Critère de convergence

Le théorème de la limite monotone fournit un critère de convergence pour une série à termes positifs.

Proposition (série à termes positifs et théorème de la limite monotone) Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration Soit $u = (u_n)_{\in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

- Si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (par définition de la convergence d'une série). Cette suite est donc bornée et en particulier majorée.

⋆ On suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

car u est à valeurs positives. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. ■

Remarque : ce résultat faux si la série n'est pas à termes positifs. Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge (grossièrement) alors que la suite de ses sommes partielles est majorée. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \leqslant 2$$

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

⋆ Tout d'abord, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, on a $k^2 \geqslant k(k-1) > 0$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

et donc :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Par ailleurs, on a aussi $S_1 = 1 \leqslant 2$ donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée (par 2).

La proposition précédente assure donc la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. ■

2) Comparaison de séries à termes positifs

Il est fréquent que l'on ne sache pas calculer les sommes partielles d'une série. Les résultats suivants permettent d'étudier la convergence d'une série en comparant le terme général de la série à celui d'une série *plus simple*.

Théorème (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs) Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n$$

⋆ Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

⋆ Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Démonstration Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

- ⋆ Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge. D'après la proposition précédente, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad V_n \leqslant M$$
Pour tout entier naturel n, on a (en sommant les inégalités) :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M \qquad \text{donc} \qquad U_n \leqslant M$$
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. D'après la proposition précédente, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- ⋆ Par contrapositon, on a le deuxième point. ■

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n}$ est convergente.

Démonstration ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{-n^2} \leqslant 1$ (car $-n^2 \leqslant 0$ et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) donc, en multipliant par $\frac{1}{2^n}$, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- ⋆ La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
- ⋆ Enfin, les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont à termes positifs.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2^n}$ est convergente. ■

Exemple La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(n+7)}$ est convergente.

Démonstration ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n}(n+7) \geqslant n\sqrt{n} > 0$ et $2 + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 3$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(n+7)} \leqslant \frac{2}{n^{3/2}}$$

- ⋆ La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (car $\frac{3}{2} > 1$) donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n^{3/2}}$ est convergente.
- ⋆ Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(n+7)}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n^{3/2}}$ sont à termes positifs (car $\sin(\theta) \geqslant -1$ pour tout θ pour la première série).

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(n+7)}$ est convergente. ■

On dispose d'un résultat analogue pour des termes généraux positifs et équivalents.

Théorème (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs) Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration Par hypothèse, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Pour le choix $\varepsilon = 1 > 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \qquad \frac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant 1$$

donc :

$$\forall n \geqslant N, \qquad u_n \leqslant 2v_n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} 2v_n$ est convergente par hypothèse donc la série $\sum_{n\geqslant N} 2v_n$ converge. Le théorème précédent entraîne la convergence de la série $\sum_{n\geqslant N} u_n$ (puisque les séries sont à termes positifs). On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. ■

Exemple La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+1}{n^2+\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{-n}$ est convergente.

Démonstration ⋆ On a $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ et $n^2+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ donc :

$$\frac{n^2+1}{n^2+\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

⋆ Comme $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in]-1,1[$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ est convergente.

⋆ Enfin, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+1}{n^2+\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ sont à termes positifs.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+1}{n^2+\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{-n}$ est convergente. ■

Exemple La série (dite *harmonique*) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration ⋆ On a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et car $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

⋆ On sait que la série (télescopique) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

⋆ De plus, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. ■

IV – Comparaison série-intégrale

Les inégalités suivantes sont à savoir retrouver.

Théorème (de comparaison série-intégrale) Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles et soient $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leqslant N$. Alors :

$$\int_M^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=M}^{N} f(n) \leqslant f(M) + \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration Soit $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leqslant N$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall t \in [n, n+1], \qquad f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t = \Big[f(n)t\Big]_n^{n+1} = f(n)\big((n+1)-n\big) = f(n)$$

De la même manière, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t = f(n+1)$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+1) \overset{(*)}{\leqslant} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{(**)}{\leqslant} f(n)$$

- ⋆ En sommant les inégalités $(**)$ sur les entiers $n \in [\![M, N]\!]$, on a :

$$\sum_{n=M}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=M}^{N} f(n)$$

  i.e., en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales,

$$\int_M^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=M}^{N} f(n)$$

- ⋆ On somme maintenant les inégalités $(*)$ sur les entiers $n \in [\![M, N-1]\!]$:

$$\sum_{n=M}^{N-1} f(n+1) \leqslant \sum_{n=M}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t$$

  De plus, le changement d'indice $k = n+1$ dans la somme de gauche nous donne :

$$\sum_{k=M+1}^{N} f(k) = \sum_{k=M}^{N} f(k) - f(M)$$

  En en déduit que :

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) \leqslant f(M) + \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t,$$

  ce qui conclut la démonstration. ■

Remarque : on dispose d'un résultat du même type pour une fonction croissante.

✎✎✎ **Exercice** 1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. Conclure quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Corollaire (séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série (dite *de Riemann*) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration On distingue quatre cas.

- ⋆ **Premier cas :** si $\alpha \leqslant 0$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).
- ⋆ **Deuxième cas :** $\alpha = 1$
  Nous avons déjà démontré que la série harmonique diverge.
- ⋆ **Troisième cas :** $0 < \alpha < 1$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < n^\alpha \leqslant n$ (car $\alpha \leqslant 1$) donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$
  Or on sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
- ⋆ **Quatrième cas :** $\alpha > 1$
  Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
  $$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$
  d'où l'on déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :
  $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,$$
  où :
  $$\int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^N t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$
  Ainsi :
  $$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$
  La suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, qui est à termes positifs, est majorée. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. ■

V – Convergence absolue

1) Définition

Définition (série absolument convergente) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente* si la série (à termes positifs) $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Exemple ⋆ Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est à termes positifs, cette série converge si et seulement si elle converge absolument.

⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne l'est pas (en effet, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge tandis que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge).

⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}$ est absolument convergente car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et puisque la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ est convergente.

Exemple Pour tout $(a,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, on pose $a^z = \mathrm{e}^{\ln(a)z}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ est convergente si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} |n^z| = \left|\mathrm{e}^{\ln(n)z}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\ln(n)z)} &= \mathrm{e}^{\ln(n)\,\mathrm{Re}(z)} \qquad (\text{par } \mathbb{R}\text{-linéarité de } w \longmapsto \mathrm{Re}(w)) \\ &= \exp\left[\ln\left(n^{\mathrm{Re}(z)}\right)\right] \\ &= n^{\mathrm{Re}(z)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$$

On conclut en utilisant le résultat sur les séries de Riemann. ■

2) Lien avec la convergence

Le lien entre les notions de convergence et de convergence absolue pour les séries est le suivant.

Proposition Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration On traite séparément les cas réel et complexe.

- $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n| + u_n \leqslant 2|u_n|$$

Par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2|u_n|$ converge. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (|u_n| + u_n)$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente et l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \big((|u_n| + u_n) - |u_n|\big) \qquad i.e. \qquad \sum_{n\geqslant 0} u_n$$

est convergente.

- $\star$ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries réelles $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent absolument et donc convergent (d'après le point précédent). L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n))$, *i.e.* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, est convergente. ■

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}$ est convergente car elle est absolument convergente.

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+i-\sin(n)}{n^2+\ln(n)}$ est convergente.

Démonstration Montrons que cette série est absolument convergente.

- $\star$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{1+i-\sin(n)}{n^2+\ln(n)}\right| = \frac{|1+i-\sin(n)|}{n^2+\ln(n)}$$

et $n^2 + \ln(n) \geqslant n^2$ et :

$$|1+i-\sin(n)| \leqslant 1 + |i| + |\sin(n)| \leqslant 3$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1+i-\sin(n)}{n^2+\ln(n)}\right| \leqslant \frac{3}{n^2}$$

- $\star$ La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3}{n^2}$ converge.
- $\star$ Enfin, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|\dfrac{1+i-\sin(n)}{n^2+\ln(n)}\right|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+i-\sin(n)}{n^2+\ln(n)}$ est absolument convergente et donc converge. ■

3) Théorème de comparaison

On dispose d'un théorème de comparaison pour les séries à termes complexes.

Théorème (de comparaison) Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

- ⋆ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{R}_+$;
- ⋆ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ (ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$) ;
- ⋆ $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument (et donc converge).

Démonstration Par hypothèse, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} M v_n$ converge par hypothèse donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument donc converge. ■

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n^3}$ converge

Démonstration ⋆ On a $\dfrac{\sin(n)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\dfrac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0).

⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est à termes positifs et elle est convergente (d'après le critère sur les séries de Riemann avec $2 > 1$).

D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n^3}$ converge absolument et donc converge. ■

Exemple La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.

Démonstration ⋆ On a $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est à termes positifs et elle est convergente (d'après le critère sur les séries de Riemann avec $2 > 1$).

D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge absolument et donc converge. ■

4) Inégalité triangulaire

Proposition (inégalité triangulaire) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration Tout d'abord, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont convergentes par hypothèse. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes finies, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|}_{\geqslant 0}$$

i.e. :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

On obtient l'inégalité souhaitée en faisant tendre N tend vers $+\infty$ (et en exploitant la continuité de $z \longmapsto |z|$).■

Exemple On a $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}\right| \leqslant 1$.

Démonstration On sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}$ est absolument convergente donc, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{i\ln(n)}}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$ ■