

Sujet 1 (complet)

Question de cours : Énoncer le lemme des coalitions

EXERCICE 1: [Indications] [Correction]

1. On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(H) \quad y'' - 4y' + 5y = 0,$$

$$(E) \quad y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x}.$$

- a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On pourra chercher une solution particulière y_0 de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$$

sous la forme $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$, où c est un réel à déterminer.

2. Pour tout réel x , on note

$$C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt \quad \text{et} \quad S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt.$$

- a) Montrer que, pour tout x réel,

$$C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x) \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x).$$

- b) En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et une primitive de $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel x et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$ obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle $[0; x]$ doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.

Dans toute la suite, on note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère les quatre fonctions suivantes de E :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x).$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F .
5. On note u l'application définie sur F par $u(f) = f'$ pour tout $f \in F$.
a) Montrer que u est linéaire.
b) Calculer l'image par u de f_1, f_2, f_3 et f_4 .
c) En déduire que u est un endomorphisme de F , et déterminer la matrice représentative A de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

6. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

7. Résoudre l'équation $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

On pourra coller ci-dessous l'exercice sans préparation.

Question de cours : Donner la définition de fonction de densité de probabilité.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction]

1. a) Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x}.$$

Étudier la fonction f sur son ensemble de définition et dresser un tableau de variations complet.

En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

b) Déterminer les solutions exactes de l'équation $f(x) = 1$.

Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et tels que les autres coefficients situés sur la colonne j sont égaux à j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. a) Écrire une fonction Python d'argument n renvoyant A_n .

b) En déduire une valeur approchée des valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.

3. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$f_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$$

et on considère l'équation E_n d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1.$$

a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution dans chacun des intervalles $] -1, +\infty[$ et $] -k, -(k-1)[$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

b) On admet (pour l'instant) que toutes les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n . La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

4. Pour $n \geq 2$, on appelle λ_n la solution de E_n comprise entre -2 et -1 .

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel t de $] -2, -1[$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, et en déduire la monotonie de la suite (λ_n) .

b) Montrer que la suite (λ_n) converge vers un réel ℓ .

Si l'on suppose que $\ell \in] -2, -1[$, comparer $f_n(\lambda_n)$ et $f_n(\ell)$.

c) Pour $\lambda \in] -2, -1[$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda}$ et conclure sur la valeur de ℓ .

d) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \leq 2 \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

e) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{1+\lambda_n}$ puis de $\lambda_n + 1$. On pourra utiliser

un encadrement de $\sum_{k=3}^n \frac{k}{k+\lambda_n}$.

5. On souhaite maintenant montrer ce qui a été admis en 3.(b).

Montrer, à l'aide du système traduisant la recherche des valeurs propres/vecteurs propres, que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation E_n .

On pourra coller ci-dessous l'exercice sans préparation.

Question de cours : Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X .
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X .
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X . On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n .
- b) Calculer alors pour tout réel x :

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq x)$$

- c) On **admet** que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité.

Montrer que T admet pour densité la fonction donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- d) À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Exercice 1

1. a) L'équation (H) est linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$, donc deux racines complexes conjuguées :

$$r = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Donc l'ensemble des solutions réelles de (H) est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{2x} (A \cos(x) + B \sin(x)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- b) • Solution particulière de $y'' - 4y' + 5y = 2$

:

on cherche une solution constante $y(x) = c$. On obtient $5c = 2$, soit $c = 2/5$.

$$y_1 : x \mapsto 2/5 \text{ est solution particulière de } y'' - 4y' + 5y = 2.$$

- Solution particulière de $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$

:

on pose $y_0(x) = ce^{2x}$ comme suggéré. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = 2ce^{2x} \quad \text{et} \quad y_0''(x) = 4ce^{2x}$$

d'où :

$$y_0'' - 4y_0' + 5y_0 = (4c - 8c + 5c)e^{2x} = ce^{2x}.$$

Ainsi y_0 est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, ce^{2x} = -e^{2x}$.

En posant $c = -1$, $y_0 : x \mapsto -e^{2x}$ est une solution particulière.

- Superposition

: par linéarité de l'équation, $y_1 + y_0 : x \mapsto \frac{2}{5} - e^{2x}$ est solution particulière de (E) . L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$S_E = \left\{ x \mapsto e^{2x} (A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{2}{5} - e^{2x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. a) • Calcul de $C(x)$

: les fonctions $u : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ et $v : t \mapsto \cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $u'(t) = e^{2t}$ et $v'(t) = -\sin(t)$. Par IPP, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \cos(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2} \cdot (-\sin(t)) dt = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x).$$

• Calcul de $S(x)$

: de même avec $u : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ et $v : t \mapsto \sin(t)$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) :

$$S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \sin(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2} \cos(t) dt = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x), \quad S(x) = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x).$$

b) En substituant la deuxième égalité dans la première :

$$C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x) \right) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{e^{2x} \sin(x)}{4} - \frac{1}{4} C(x).$$

$$\text{D'où } \frac{5}{4} C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{e^{2x} \sin(x)}{4}, \text{ soit}$$

$$C(x) = \frac{2(e^{2x} \cos(x) - 1) + e^{2x} \sin(x)}{5} = \frac{e^{2x}(2 \cos(x) + \sin(x)) - 2}{5}.$$

De même, en substituant la première dans la seconde, on trouve

$$S(x) = \frac{e^{2x}(2 \sin(x) - \cos(x)) + 1}{5}.$$

Comme C et S sont, par définition, des primitives respectivement de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ et $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ (s'annulant en 0) :

$$\text{Une primitive de } x \mapsto e^{2x} \cos(x) : \quad x \mapsto \frac{e^{2x}(2 \cos(x) + \sin(x))}{5}.$$

$$\text{Une primitive de } x \mapsto e^{2x} \sin(x) : \quad x \mapsto \frac{e^{2x}(2 \sin(x) - \cos(x))}{5}.$$

3. Méthode des rectangles à gauche : on découpe $[0, x]$ en nb_pas sous-intervalles de longueur $h = x/\text{nb_pas}$, et on approche l'intégrale par

$$\int_0^x e^{2t} \cos(t) dt \approx h \sum_{k=0}^{\text{nb_pas}-1} e^{2t_k} \cos(t_k), \quad \text{avec } t_k = kh.$$

```
1 import math as m
2
3 def intC(x, nb_pas):
4     h = x / nb_pas
5     somme = 0
6     for k in range(nb_pas):
7         t = k * h
8         somme += m.exp(2 * t) * m.cos(t)
9     return h * somme
```

4. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \cdot f_k = \tilde{0}$$

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot e^{2x} + \alpha_3 \cdot e^{2x} \cos(x) + \alpha_4 \cdot e^{2x} \sin(x) = 0. \quad (\star)$$

• On cherche à montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Évaluons $(\star)$ en quatre valeurs particulières :

- en $x = 0$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$;
- en $x = \pi/2$: $\alpha_1 + \alpha_2 e^\pi + \alpha_4 e^\pi = 0$;
- en $x = \pi$: $\alpha_1 + \alpha_2 e^{2\pi} - \alpha_3 e^{2\pi} = 0$;
- en $x = 2\pi$: $\alpha_1 + \alpha_2 e^{4\pi} + \alpha_3 e^{4\pi} = 0$.

En soustrayant la première et la troisième : $\alpha_2(1 - e^{2\pi}) + \alpha_3(1 + e^{2\pi}) = 0$.

En soustrayant la première et la quatrième : $\alpha_2(1 - e^{4\pi}) + \alpha_3(1 - e^{4\pi}) = 0$, soit (puisque $1 - e^{4\pi} \neq 0$) $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

En réinjectant dans la précédente : $\alpha_3(1 + e^{2\pi} - 1 + e^{2\pi}) = 0$, soit $2\alpha_3 e^{2\pi} = 0$, donc

- $\alpha_3 = 0$.
- Puis $\alpha_2 = 0$,
- puis (première équation) $\alpha_1 = 0$,
- puis (deuxième équation) $\alpha_4 = 0$.

La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est libre, donc base de l'espace F qu'elle engendre.

5. a) Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur somme et leur produit par un scalaire le sont aussi, et la dérivation est linéaire :

$$u(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda u(f) + u(g).$$

Donc u est linéaire sur F .

- b) Calcul direct :

- $\forall x \in \mathbb{R}, u(f_1)(x) = (1)' = 0$, donc $u(f_1) = 0_F$ (la fonction nulle).
- $\forall x \in \mathbb{R}, u(f_2)(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x} = 2f_2(x)$, donc $u(f_2) = 2f_2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, u(f_3)(x) = (e^{2x} \cos(x))' = 2e^{2x} \cos(x) - e^{2x} \sin(x) = 2f_3(x) - f_4(x)$,
donc $u(f_3) = 2f_3 - f_4$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, u(f_4)(x) = (e^{2x} \sin(x))' = 2e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \cos(x) = f_3(x) + 2f_4(x)$,
donc $u(f_4) = f_3 + 2f_4$. Pour résumer :

$$\begin{cases} u(f_1) = 0 \\ u(f_2) = 2f_2 \\ u(f_3) = 2f_3 - f_4 \\ u(f_4) = f_3 + 2f_4 \end{cases}$$

- c) • Les images $u(f_1), u(f_2), u(f_3), u(f_4)$ sont toutes des combinaisons linéaires de f_1, f_2, f_3, f_4 , donc appartiennent à $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Par linéarité, l'image par u d'une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_4$ est encore dans F , donc $u(F) \subset F$.

Donc u est un endomorphisme de F .

- La matrice de u dans $\mathcal{B}$ a pour colonnes les coordonnées de $u(f_1), u(f_2), u(f_3), u(f_4)$ dans $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. • Résolution de $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2 \\ 2x_3 + x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = x_3/2 \\ 2x_3 + x_3/2 = 1, \text{ soit } x_3 = 2/5 \end{cases}$$

Donc $x_2 = 0$, $x_3 = 2/5$, $x_4 = 1/5$, et x_1 reste libre.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Interprétation

Le résultat précédent interprété en terme de fonctions nous dit que

$$f_3 = u \left(x_1 f_1 + \frac{2}{5} f_2 + \frac{1}{5} f_4 \right)$$

et donc que $x_1 f_1 + \frac{2}{5} f_2 + \frac{1}{5} f_4$ est une **primitive** de f_3 .

$$\int f_3 = x_1 f_1 + \frac{2}{5} f_2 + \frac{1}{5} f_4 + cste$$

On retrouve l'expression d'une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ trouvée à la question **2.b**).

7. • Calcul de $A^2 - 4A + 5I_4$

. On calcule d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Calcul direct : ligne 3, colonne 3 : $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 3$; ligne 3, colonne 4 : $0 + 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$; etc.)

Donc :

$$A^2 - 4A + 5I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 - 8 + 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 8 + 5 & 4 - 0 + 0 \\ 0 & 0 & -4 - 0 + 0 & 3 - 8 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Résolution de $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 5x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ 4x_4 = 0 \\ -4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2/5 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Interprétation

. Cette solution X représente, dans la base $\mathcal{B}$, la fonction

$$f = \frac{2}{5}f_1 - f_2 = \frac{2}{5} - e^{2x},$$

qui est élément de F . Or l'équation matricielle $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

traduit, au niveau des fonctions, l'égalité :

$$(u^2 - 4u + 5Id_F)(f) = 2f_1 - f_2,$$

c'est-à-dire $f'' - 4f' + 5f = 2 - e^{2x}$ — on reconnaît exactement l'équation (E) de la question **1.b)** !

La fonction $f = \frac{2}{5} - e^{2x}$ est donc une solution particulière de (E) , ce qui est cohérent avec ce qu'on avait trouvé à la question **1.b)**.

On retrouve la solution particulière de (E) trouvée à la question **1.b)**.

Exercice 2

1. a) f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(2+x)^2} < 0$$

• Tableau de variations de f

:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	
$f(x)$	0^- $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	
				0^+

D'après le théorème de la bijection continue :

- L'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solutions sur $] -\infty, -2[$
- puisque $1 > 0$, elle admet exactement une solution sur $] -2, -1[$ d'après le théorème de la bijection continue
- de même sur $] -1, +\infty[$

Ainsi :

L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.

b) On multiplie par $(1+x)(2+x) \neq 0$:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} = 1 \iff (2+x) + 2(1+x) = (1+x)(2+x) \iff 4+3x = 2+3x+x^2 \iff x^2 = 2.$$

Les solutions sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

2. a) Le coefficient (i, j) de A_n vaut j si $i \neq j$ et 0 si $i = j$ (en numérotation 1-indexée). En Python (0-indexé) :

```
1 import numpy as np
2
3 def matrice_An(n):
4     A = np.zeros((n, n))
5     for i in range(n):
6         for j in range(n):
7             if i != j:
8                 A[i][j] = j + 1
9     return A
```

b) On appelle `numpy.linalg.eigvals` :

```
1 for n in [2, 3, 4, 10]:
2     A = matrice_An(n)
3     print("n=" + str(n) + " : " + str(np.linalg.eigvals
        (A)))
```

On obtient :

$$\begin{cases} n = 2 : & 1.414 ; -1.414 \\ n = 3 : & 3.766 ; -1.283 ; -2.484 \\ n = 4 : & 7.106 ; -1.214 ; -3.525 ; -2.3667 \\ n = 10 : & 48.112 ; -1.089 ; -2.159 ; -9.631 ; -3.221 ; -8.535 \\ & -4.280 ; -5.338 ; -7.462 ; -6.398 \end{cases}$$

3. a)

La fonction $f_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+t}$ est continue et strictement décroissante sur chaque intervalle inclus dans son domaine de définition (car $f'_n(t) = -\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+t)^2} < 0$). On applique le Théorème de la bijection continue sur chaque intervalle.

- $\text{Sur }]-1, +\infty[$

:
 $\lim_{t \rightarrow -1^+} f_n(t) = +\infty$ (terme $k=1$) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0 < 1$. Par le théorème de la bijection continue, E_n a exactement une solution.

- $\text{Sur }]-k, -(k-1)[$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$

:
 $\lim_{t \rightarrow -k^+} f_n(t) = +\infty$ (terme $k : k+t \rightarrow 0^+$) et $\lim_{t \rightarrow -(k-1)^-} f_n(t) = -\infty$ (terme $k-1 : (k-1)+t \rightarrow 0^-$). Par le théorème de la bijection continue, E_n a exactement une solution.

- b) D'après 3.(a), E_n admet $1+(n-1) = n$ solutions réelles distinctes. Ainsi, $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de taille n admettant n valeurs propres distinctes, donc par la condition suffisante de diagonalisabilité

A_n est diagonalisable

4. a) Pour $t \in]-2, -1[$, on a $n+1+t > n-1 \geq 1 > 0$, donc

$$f_{n+1}(t) - f_n(t) = \frac{n+1}{n+1+t} > 0.$$

En particulier $f_{n+1}(\lambda_n) > f_n(\lambda_n) = 1 = f_{n+1}(\lambda_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $]-2, -1[$, on conclut

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}.$$

(On peut raisonner par l'absurde si nécessaire)

la suite (λ_n) est strictement croissante.

- b) • (λ_n) est croissante et majorée par -1 (car par définition $\lambda_n \in]-2, -1[)$, donc :

Elle converge vers un réel $\ell \in]-2, -1]$.

- Si $\ell \in]-2, -1[$: la suite croissante (λ_n) converge vers ℓ , donc $\lambda_n \leq \ell$ pour tout n . La décroissance de f_n donne alors :

$$f_n(\ell) \leq f_n(\lambda_n) = 1.$$

c)

- Soit $\lambda \in]-2, -1[$ fixé.

Le terme général de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{k + \lambda}$ vérifie

$$\frac{k}{k + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda/k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

donc la série diverge grossièrement, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \lambda} = +\infty$$

- Finalement, si $\ell \in]-2, -1[$, on aurait :

D'une part, d'après ce qui précède, en prenant $\lambda = \ell$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) = +\infty.$$

D'autre part, $f_n(\ell) \leq 1$ pour tout n d'après **4.b)**, **contradiction !**
Donc $\ell \notin]-2, -1[$, et comme $\ell \in]-2, -1[$ (par conservation des inégalités dans une limite) :

$$\boxed{\ell = -1.}$$

d) Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Pour $k \geq 1$: par quantité conjuguée, on a :

$$2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}.$$

- En sommant de $k = 1$ à n et en utilisant le télescope :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2\sqrt{n}.$$

Donc $0 \leq \frac{H_n}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, et par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0.}$$

e) Pour $k \geq 3$ et $\lambda_n \in]-2, -1[$, on a $k + \lambda_n \in]k-2, k-1[$, d'où

$$\frac{k}{k-1} < \frac{k}{k + \lambda_n} < \frac{k}{k-2}.$$

En écrivant $\frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$ et $\frac{k}{k-2} = 1 + \frac{2}{k-2}$ et en sommant de $k = 3$ à n :

$$n-3 + (H_{n-1} - 1) < \sum_{k=3}^n \frac{k}{k + \lambda_n} < (n-2) + 2H_{n-2}.$$

Or $f_n(\lambda_n) = 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{1 + \lambda_n} = 1 - \frac{2}{2 + \lambda_n} - \sum_{k=3}^n \frac{k}{k + \lambda_n}.$$

Le terme $1 - \frac{2}{2 + \lambda_n}$ est borné (car $\lambda_n \rightarrow -1$ donc $2 + \lambda_n \rightarrow 1$). Les encadrements de la somme, divisés par $-n$, donnent deux suites toutes deux de limite 1 (en utilisant $H_n/n \rightarrow 0$). Par le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{1 + \lambda_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n, \quad \text{puis par passage à l'inverse :} \quad \lambda_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

5. • Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq (0)$ un vecteur propre de A_n pour la valeur propre λ

Puisque le coefficient (i, j) de A_n vaut j pour $i \neq j$ et 0 pour $i = j$, on a :

$$(A_n X)_i = \sum_{j \neq i} j x_j = \underbrace{\sum_{j=1}^n j x_j}_{\text{notée } S} - i x_i.$$

L'équation $A_n X = \lambda X$ s'écrit donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(*) \quad S = (\lambda + i) x_i.$$

- Si $S = 0$

:(*) donne $(\lambda + i)x_i = 0$ pour tout i . Si $\lambda \neq -i$ pour tout i , alors tous les x_i sont nuls : contradiction avec $X \neq 0$. Sinon, $\lambda = -i_0$ pour un certain i_0 , et $x_j = 0$ pour $j \neq i_0$. Alors $S = i_0 x_{i_0} = 0$ impose $x_{i_0} = 0$ (car $i_0 \geq 1$) : contradiction. Donc $S \neq 0$.

- Si $S \neq 0$

:(*) impose $\lambda + i \neq 0$ pour tout i , et $x_i = \frac{S}{\lambda + i}$. En substituant dans la définition de S :

$$S = \sum_{j=1}^n j x_j = S \sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda + j}.$$

Puisque $S \neq 0$, on obtient $\sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda + j} = 1$: λ est solution de E_n .

- Réciproquement, si λ est solution de E_n (donc $\lambda \notin \{-1, \dots, -n\}$), le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + 1} \\ \vdots \\ \frac{n}{\lambda + n} \end{pmatrix}$$

est non nul, et vérifie $\sum_{j=1}^n \frac{j}{\lambda + j} = 1$ par hypothèse, et un calcul immédiat montre $A_n X = \lambda X$.

Les valeurs propres de A_n sont exactement les solutions de E_n .

Exercice 3

1. f est continue sur $] - \infty, 1]$ et $]1, +\infty[$. Elle est positive sur tout $\mathbb{R}$. Elle est également nulle sur $] - \infty, 1]$. Il suffit donc de vérifier que $\int_1^{+\infty} f$ est convergente, avec $\int_1^{+\infty} f = 1$.

Soit donc $x > 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_1^x f &= \int_1^x \frac{2}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{t^2} \right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien une densité.

2. On note F la fonction de répartition de X . Par définition, on sait que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, on voit directement sur la densité que

$$\text{Supp}(X) =]1, +\infty[$$

donc on peut dire immédiatement que

$$F(x) = 0 \quad \forall x \leq 1$$

Comme f est nulle sur $] - \infty, 1]$, on a de plus, pour tout $x > 1$:

$$F(x) = \int_1^x f = \int_1^x \frac{2}{t^3} dt = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (\text{cf qst 1})$$

Conclusion :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Il suffit de voir que les deux variables ont la même fonction de répartition.

Tout d'abord, on note que $\sqrt{1-U} \in]0, 1[$ et donc que

$$\text{Supp}(V) =]1, +\infty[= \text{Supp}(X)$$

Elles ont donc même fonction de répartition nulle sur $] - \infty; 1]$.

Ensuite, soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{car } \sqrt{1-U} > 0 \\ &= P\left(1-U \geq \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{car } 1-U > 0 \text{ et la fct carrée est bij croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &= P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Or, comme $x > 1$, on a $\frac{1}{x^2} \in [0; 1]$, de même pour $1 - \frac{1}{x^2} \in [0; 1]$ et donc

$$P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

En conclusion, on observe que

$$P(V \leq x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Les variables V et X ont donc même loi.

4. C'est très rapide :

```
1 import random as rd
2 import random as rd
3
4 def simul_V():
5     U=rd.random()
6     return (1/np.sqrt(1-U))
```

5. • Variance :

f étant nulle sur $] - \infty, 1]$, X admet une variance ssi $\int_1^{+\infty} |x^2|f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x} dx$ est convergente, ce qui (d'après le cours) n'est pas le cas. Ainsi,

X n'admet pas de variance.

- Espérance :

f étant nulle sur $] - \infty, 1]$, X admet une espérance ssi $\int_1^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ est convergente, ce qui est le cas. (à faire). Dans ce cas, la fonction dans l'intégrale étant positive, la valeur de l'intégrale est la même que celle potentiellement calculée de l'intégrale ci-dessus. Ainsi, après calcul,

$$\mathbb{E}[X] = 2$$

L'espérance étant, d'après la loi faible, approchée par la moyenne empirique sur un grand nombre de réalisation, le programme suivant permet de donner une approximation de $\mathbb{E}[X]$:

```
1 def esperance():
2     N=1000 # on simule N fois l'expérience
3     # on rend la moyenne empirique qui approche l'
      espérance
4     return(np.mean([simul_V() for _ in range(N)]))
```

et un essai rend par exemple $1.97361995776846 \simeq 2$, ceci a donc tendance à confirmer ce qui est annoncé.

6. a) On note que

$$\text{Supp}(T_n) \subset \left[\frac{1}{\sqrt{n}}; +\infty \right[$$

Si on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n , on a alors

$$F_{T_n}(x) = 0 \quad \forall x < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si maintenant $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= P(T_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq \sqrt{n} \cdot x) \\ &= P(X_1 \leq \sqrt{n} \cdot x, \dots, X_n \leq \sqrt{n} \cdot x) \\ &= P(X \leq \sqrt{n} \cdot x)^n \quad \text{par indépendance et même loi que } X \\ &= F(\sqrt{n} \cdot x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \end{aligned}$$

En conclusion,

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 1 - \frac{1}{nx^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

b) • Si x fixé strictement positif,

quand $n \rightarrow +\infty$, comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe forcément un n_0 tel que on a $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$$

Or, par stricte positivité de $1 - \frac{1}{nx^2}$, on a

$$\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)}$$

Mais comme $\frac{1}{nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on sait que

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \sim -n \frac{1}{nx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

• Si $x \leq 0$

, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

D'où

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) Dans ce cas, on sait que la densité g de G est la dérivée de sa fonction de répartition. Il suffit donc de dériver G pour obtenir la formule annoncée.

- d) Etant donné que $\text{Supp}(T) = [0, +\infty[$, T admet une espérance ssi $I = \int_0^{+\infty} |x|g(x)dx = \int_0^{+\infty} xg(x)dx$ est convergente. On observe que la valeur de cette intégrale sera également celle de son espérance. Or,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} dx$$

Le changement de variable généralisé avec $x = \frac{1}{u}$ qui est $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur l'intervalle ouvert considéré nous donne $dx = -\frac{1}{u^2} du$ et le changement de bornes :

x	0	$+\infty$
u	$+\infty$	0

Ainsi, sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales, on aura

$$I = - \int_{+\infty}^0 2u^2 e^{-u^2} \frac{1}{u^2} du = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du$$

mais cette intégrale est connue dans le cours. Elle est convergente (donc $\mathbb{E}[T]$ existe) et on a

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \sqrt{\pi}}$$

Exercice du sujet 1

On appelle *vecteurs creux* des vecteurs de très grande dimension, dont la grande majorité des coordonnées sont nulles. Pour coder un vecteur creux, on utilise une liste de deux listes, celle de ses coordonnées non nulles et celle des indices correspondants triée par ordre croissant, suivies de la taille du vecteur.

Ainsi, le vecteur de $\mathbb{R}^9$ $(1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$ est représenté par $[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]$. Les vecteurs usuels sont, eux, codés par des vecteurs `numpy`.

1. Écrire une fonction `coder` renvoyant la représentation creuse d'un vecteur. Écrire une fonction `decoder` faisant le travail inverse.
Par exemple : `coder([1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0])` doit renvoyer $[[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9]$; `decoder([[1, 3, -1], [0, 2, 7], 9])` doit renvoyer $[1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -1, 0]$

Pour de tels vecteurs, il serait trop coûteux, tant en temps qu'en mémoire, d'écrire toutes les coordonnées nulles et de calculer comme habituellement dans $\mathbb{R}^n$. C'est pourquoi on utilise le codage de la question précédente.

2. Écrire une fonction `prod_scal(V1, V2)` prenant en argument deux vecteurs creux appartenant au même espace $\mathbb{R}^n$, codés comme dans la première question et qui calcule leur produit scalaire.
Il n'est pas autorisé de repasser par la forme usuelle en décodant `V1` et `V2`.

Exercice du sujet 2

1. On considère des listes non vides ne contenant que 1 ou 2 valeurs différentes.

Par exemple $['Marwa', 'Ambre', 'Marwa', 'Ambre', 'Ambre']$.

Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election1(L)` qui prend en entrée une liste `L` de cette forme et qui renvoie l'élément qui est majoritaire. La fonction doit renvoyer `None` en cas d'égalité.

2. On considère maintenant des listes non-vides, mais pouvant contenir plus de 2 valeurs différentes.

Par exemple $['Olivia', 'Gita', 'Mathys', 'Olivia', 'Mathys']$.

La liste représente une urne, et on veut savoir qui a obtenu le plus de voix.

Écrire, en langage Python, une fonction nommée `election2(L)` qui prend une liste ayant cette forme et qui renvoie la liste des personnes ayant obtenu le maximum de voix (la liste contient plusieurs personnes en cas d'égalité).

Sur la liste donnée en exemple, la fonction doit renvoyer $['Olivia', 'Mathys']$ ou $['Mathys', 'Olivia']$ car Olivia et Mathys sont ex aequo avec deux voix chacun.

Exercice du sujet 3

À partir d'une séquence de nucléotides, on souhaite obtenir l'ensemble de toutes les chaînes qui se répètent de manière **consécutives** ainsi que leur **position de départ**. (position 0 = début de la séquence.)

Exemple :

séquence : TACG ACG ATACG :

2 répétitions **successives** de la chaîne ACG (et non 3!)

On dit que ACG est une chaîne périodique de longueur 3 (3 éléments), de période 2 (nombre de répétitions successives) et de position 1.

On admet que la longueur maximale d'une chaîne dans une séquence de longueur n ne peut excéder $\frac{n}{2}$.

1. Écrire une fonction `repetitions` d'arguments `(seq, pos, long)` (pour (séquence, position, longueur)), qui rend :
 - [] s'il n'y a pas de chaîne répétitive à cet emplacement
 - la liste `[chaîne, période]` sinon.

Par exemple : Avec la séquence TACG ACG ACG ATACG :

- pour `pos=1` et `long=3`, la fonction doit rendre `['ACG', 3]`
- pour `pos=4` et `long=3`, la fonction doit rendre `['ACG', 2]`.

2. En déduire une fonction `chaines(sequence, long)` qui rend la liste des listes `[chaîne, position, période]` de longueur `long` dans la séquence. (On ne se préoccupe pas des éventuelles répétitions de chaîne).

Exemple : Pour la séquence de démarrage TACG ACG ATACG, on obtiendra $[['ACG', 1, 2], ['CGA', 2, 2]]$.