

# Fonctions logarithme népérien et exponentielle

Terminale Bac Pro • ERA • TMA • ICCER (Groupement B)

**Programme complémentaire — poursuite d'études** Ce module fait partie du **programme complémentaire** de Terminale Bac Pro : il prépare la poursuite d'études (BTS et au-delà) et se traite dans le cadre de l'accompagnement au choix d'orientation. Il ne fait pas partie du programme évalué en CCF.

## Objectifs du chapitre :

- Connaître et utiliser les propriétés de la fonction exponentielle  $e^x$
- Connaître et utiliser les propriétés du logarithme népérien  $\ln(x)$
- Comprendre le lien de réciprocity entre  $e^x$  et  $\ln(x)$
- Résoudre des équations exponentielles et logarithmiques
- Modéliser des phénomènes de croissance/décroissance continue (refroidissement, séchage du bois)

## Situation professionnelle — Séchage du bois et refroidissement

Un menuisier surveille le séchage de planches de chêne dont l'humidité décroît selon un modèle exponentiel. Un ébéniste suit le refroidissement d'une pièce en bois traitée thermiquement. Ces deux phénomènes font appel aux fonctions  $e^x$  et  $\ln(x)$ .

## 1. Le nombre e

### DÉFINITION

Le nombre **e** est un nombre irrationnel (non décimal) dont la valeur approchée est :

$$e \approx 2,718\,281\,828\dots$$

C'est la *base naturelle* des logarithmes et des exponentielles. Il joue en analyse le rôle que joue 10 pour les logarithmes décimaux ( $\log_{10}$ ).

### VALEURS REMARQUABLES

$$e^0 = 1 \mid e^1 = e \approx 2,718 \mid e^2 \approx 7,389 \mid e^{-1} = 1/e \approx 0,368$$

## 2. La fonction exponentielle $e^x$

### 2.1 Définition et propriétés algébriques

### DÉFINITION

La **fonction exponentielle** est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^x$$

C'est l'unique fonction égale à sa propre dérivée et valant 1 en 0 :  $(e^x)' = e^x$ .

## PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

| Propriété | Formule                    | Exemple numérique                                               |
|-----------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Produit   | $e^{a+b} = e^a \times e^b$ | $e^3 = e^1 \times e^2 \approx 2,718 \times 7,389 \approx 20,09$ |
| Quotient  | $e^{a-b} = e^a / e^b$      | $e^1 = e^3 / e^2 \approx 20,09 / 7,389 \approx 2,718$           |
| Puissance | $(e^a)^b = e^{ab}$         | $(e^2)^3 = e^6 \approx 403,4$                                   |
| Inverse   | $e^{-a} = 1 / e^a$         | $e^{-1} = 1/e \approx 0,368$                                    |
| Neutre    | $e^0 = 1$                  | Tout nombre élevé à 0 vaut 1                                    |

## ATTENTION

$$e^{a+b} \neq e^a + e^b \quad \text{et} \quad e^{a \times b} \neq e^a \times e^b$$

La fonction exponentielle est toujours **strictement positive** :  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## APPLICATION

Simplifie :  $e^3 \times e^{-1}$ , puis  $\frac{e^5}{e^2}$ , puis  $(e^2)^4$ .

## 2.2 Dérivée de la fonction exponentielle

## DÉRIVÉES

| Fonction          | Dérivée                         | Remarque                           |
|-------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| $f(x) = e^x$      | $f'(x) = e^x$                   | Unique fonction égale à sa dérivée |
| $f(x) = e^{ax}$   | $f'(x) = a \times e^{ax}$       | $a$ est une constante réelle       |
| $f(x) = e^{u(x)}$ | $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ | Règle de la chaîne                 |

### EXEMPLES DE CALCUL DE DÉRIVÉES

a)  $f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

b)  $f(x) = e^{-0,1x} \Rightarrow f'(x) = -0,1 \times e^{-0,1x}$

c)  $f(x) = e^{x^2+1}$  : poser  $u(x) = x^2+1$ ,  $u'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \times e^{x^2+1}$

d)  $f(x) = 5e^{2x} + 3 \Rightarrow f'(x) = 10e^{2x}$

## 2.3 Variations, tableau et limites

### VARIATIONS DE $E^X$

La fonction  $x \mapsto e^x$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

Sa dérivée  $e^x$  est toujours strictement positive, donc la fonction ne fait que croître.

Tableau de variations de  $f(x) = e^x$

| x             | $-\infty$ |                                                                                     | $+\infty$ |
|---------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x) = e^x$ |           | +++++                                                                               |           |
| $f(x) = e^x$  | $0^+$     |  | $+\infty$ |

### LIMITES

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  (la courbe se rapproche de l'axe des x sans jamais le toucher)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  (croissance très rapide — plus vite que tout polynôme)

### 3. La fonction logarithme népérien $\ln$

#### 3.1 Définition

##### DÉFINITION

Le **logarithme népérien** (noté  **$\ln$** ) est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

Autrement dit,  $\ln(x)$  est l'exposant auquel il faut élever  $e$  pour obtenir  $x$ .

*Exemples :*

- $\ln(e) = 1$  car  $e^1 = e$
- $\ln(1) = 0$  car  $e^0 = 1$
- $\ln(e^2) = 2$  car  $e^2 = e^2$

##### DOMAINE DE DÉFINITION

$\ln(x)$  n'est défini que pour  $x > 0$ . On ne peut **pas** calculer  $\ln(0)$  ni  $\ln$  d'un nombre négatif.

#### 3.2 Propriétés algébriques

##### PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN

Pour tous réels  $a > 0$ ,  $b > 0$  et tout entier  $n$  :

| Propriété    | Formule                             | Exemple numérique                                             |
|--------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Produit      | $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ | $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,693 + 1,099 = 1,792$      |
| Quotient     | $\ln(a / b) = \ln(a) - \ln(b)$      | $\ln(2) = \ln(6) - \ln(3) \approx 1,792 - 1,099 = 0,693$      |
| Puissance    | $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$        | $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,693 = 2,079$ |
| Inverse      | $\ln(1/a) = -\ln(a)$                | $\ln(0,5) = -\ln(2) \approx -0,693$                           |
| Valeurs clés | $\ln(1) = 0$ ; $\ln(e) = 1$         | $\ln(e^k) = k$ pour tout réel $k$                             |

## APPLICATION

Simplifie :  $\ln(3) + \ln(4)$ , puis  $\ln(20) - \ln(4)$ , puis  $\ln(5^2)$ .

### 3.3 Dérivée du logarithme népérien

#### DÉRIVÉES

| Fonction           | Dérivée                | Condition  |
|--------------------|------------------------|------------|
| $f(x) = \ln(x)$    | $f'(x) = 1/x$          | $x > 0$    |
| $f(x) = \ln(u(x))$ | $f'(x) = u'(x) / u(x)$ | $u(x) > 0$ |

#### EXEMPLES

- a)  $f(x) = \ln(3x) : u = 3x, u' = 3 \Rightarrow f'(x) = 3/(3x) = 1/x$   
b)  $f(x) = \ln(x^2 + 1) : u = x^2 + 1, u' = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x / (x^2 + 1)$   
c)  $f(x) = \ln(2x + 5) \Rightarrow f'(x) = 2 / (2x + 5)$  (valable pour  $x > -5/2$ )

### 3.4 Variations, tableau et limites

#### VARIATIONS DE $\ln(x)$

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est **strictement croissante** sur  $]0; +\infty[$ .

Sa dérivée  $1/x$  est positive pour  $x > 0$  : la fonction ne fait que croître.

Tableau de variations de  $f(x) = \ln(x)$

| x               | $0^+$     |                                                                                     | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x) = 1/x$   |           | +++++                                                                               |           |
| $f(x) = \ln(x)$ | $-\infty$ |  | $+\infty$ |

### LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ (mais croissance très lente — beaucoup plus lente que } x \text{)}$$

## 4. Lien entre $e^x$ et $\ln$ — Fonctions réciproques

### FONCTIONS RÉCIPROQUES

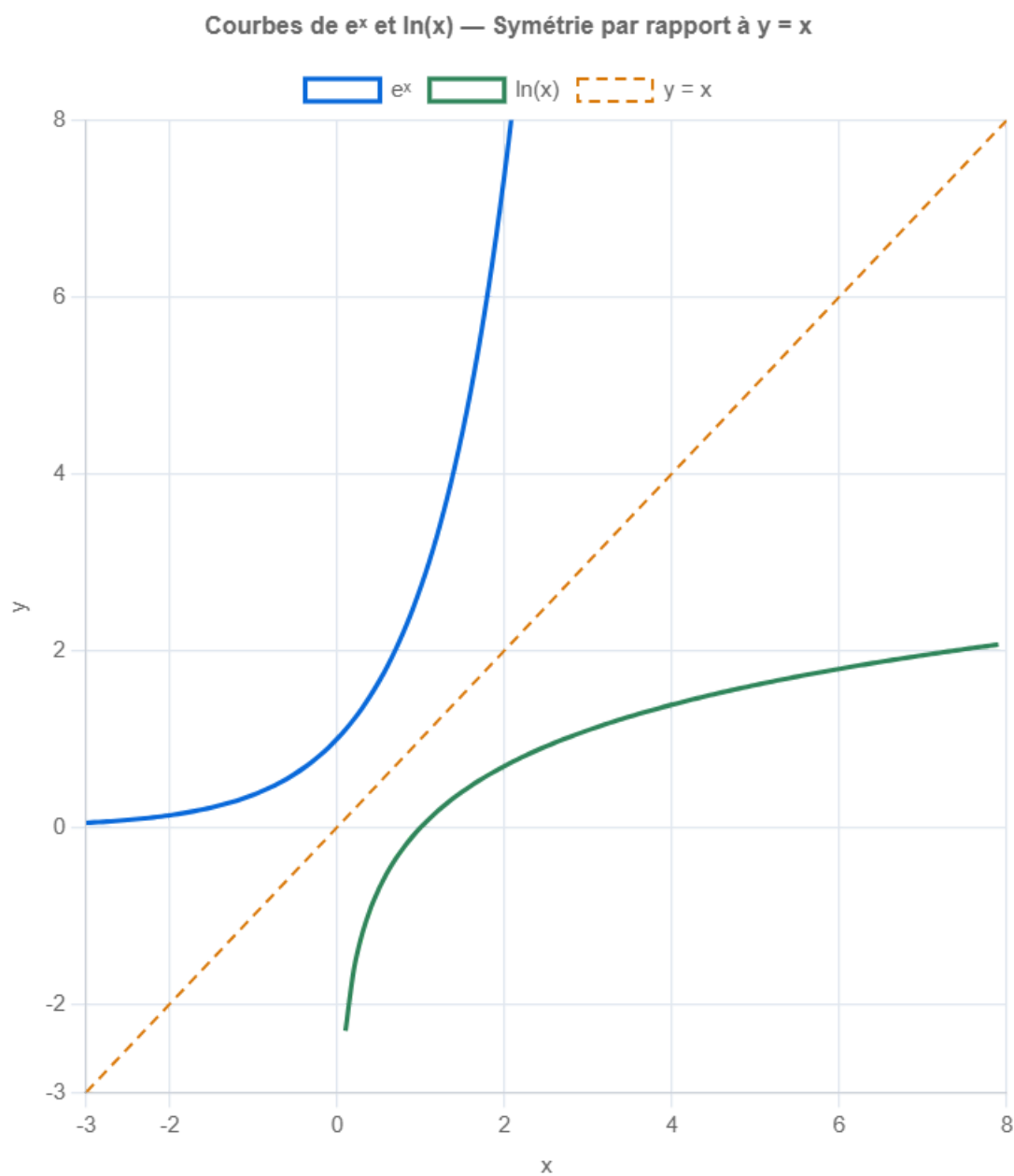
Les fonctions  $e^x$  et  $\ln$  sont **réciproques** l'une de l'autre :

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

Géométriquement, leurs courbes sont **symétriques par rapport à la droite  $y = x$** .

## Graphiques superposés de $e^x$ et $\ln(x)$



Les courbes de  $e^x$  et  $\ln(x)$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$  (en tireté).

## 5. Résolution d'équations

### MÉTHODE

#### Type 1 — Équation exponentielle :

$$e^x = a$$

→ Possible uniquement si  $a > 0$ .

$$\text{Solution : } x = \ln(a)$$

#### Type 2 — Équation logarithmique :

$$\ln(x) = b$$

→

$$\text{Solution : } x = e^b$$

### EXEMPLES RÉSOLUS

a)  $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5) \approx 1,609$

b)  $e^{2x} = 8 \Rightarrow 2x = \ln(8) = 3 \ln(2) \Rightarrow x = 3 \ln(2) / 2 \approx 1,040$

c)  $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3 \approx 20,09$

d)  $\ln(2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = e^0 = 1 \Rightarrow x = 1$  (vérification :  $2 \times 1 - 1 = 1 > 0 \checkmark$ )

e)  $3e^x = 15 \Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5) \approx 1,609$

#### MÉTHODE GÉNÉRALE — TROUVER UN INSTANT T DANS UN MODÈLE

Pour trouver le temps  $t$  tel que  $f(t) = \text{valeur cible}$  :

1.

Isoler l'exponentielle seule d'un côté

2.

Passer au  $\ln$  des deux membres

3.

Utiliser  $\ln(e^u) = u$  pour simplifier

4.

Résoudre l'équation restante

#### APPLICATION

Un artisan menuisier sèche du bois selon  $H(t) = 35 \times e^{-0,08t}$ . Au bout de combien de jours l'humidité est-elle inférieure à 10 % ?

## 6. Calculatrice interactive

### Calculer $e^x$ et $\ln(x)$

Entrer une valeur de  $x$  puis cliquer sur « Calculer ».

Valeur de  $x$  :

ex : 2

Calculer

## 7. Applications — Modèles professionnels

### 7.1 Application professionnelle — Loi de refroidissement de Newton

#### CONTEXTE PROFESSIONNEL

**Situation :** Une pièce métallique sort d'un four à  $80^{\circ}\text{C}$ . Elle est posée dans un local à  $20^{\circ}\text{C}$ . Le refroidissement suit la **loi de Newton** avec  $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$ .

$$T(t) = 20 + 60 \times e^{-0,1t}$$

où  $T$  est en  $^{\circ}\text{C}$  et  $t$  en minutes ( $T_0 = 80^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{amb}} = 20^{\circ}\text{C}$ ,  $T_0 - T_{\text{amb}} = 60$ ).

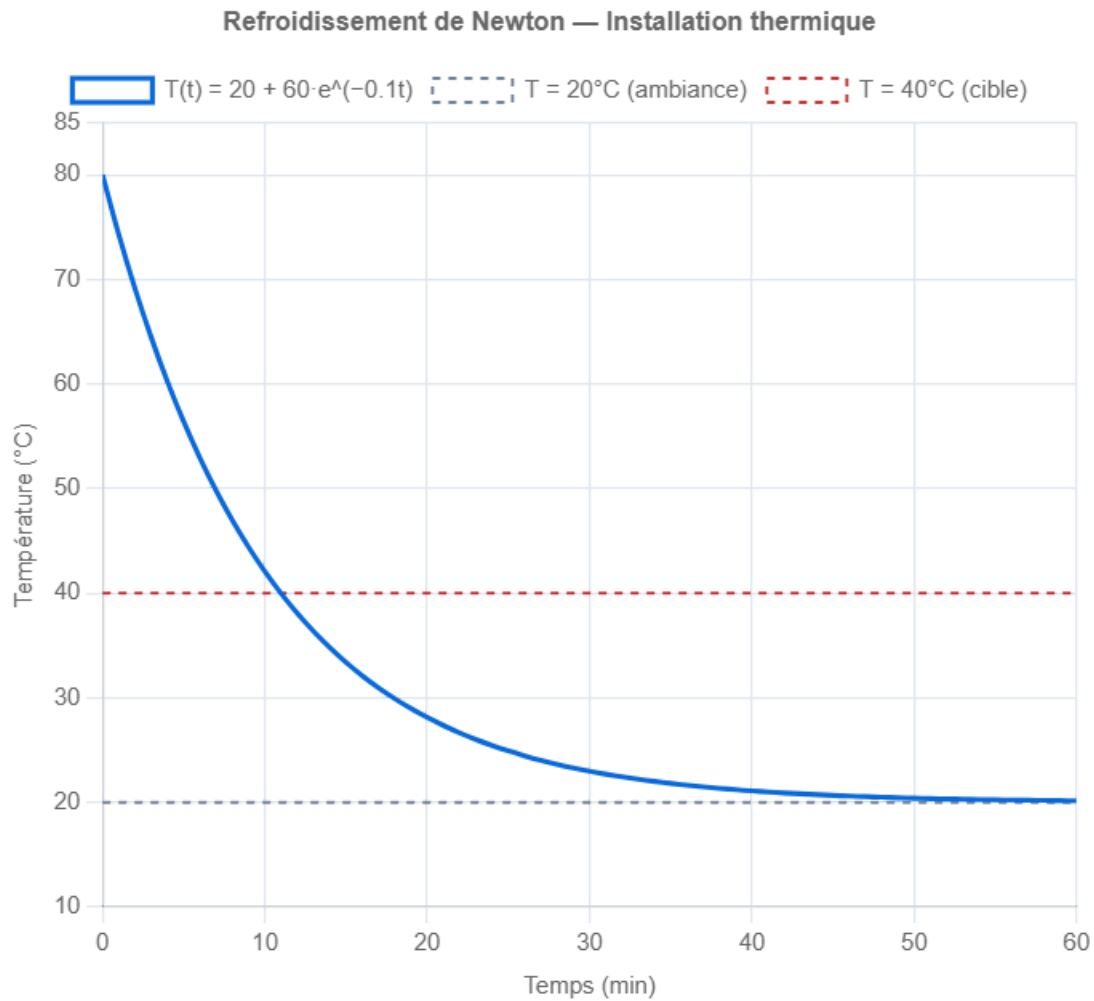
#### QUESTION 1 — CALCULER T APRÈS 10 MINUTES

$$\begin{aligned} T(10) &= 20 + 60 \times e^{-0,1 \times 10} \\ &= 20 + 60 \times e^{-1} \\ &= 20 + 60 \times 0,3679... \\ &= 20 + 22,07 \\ &\approx 42,1^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

#### QUESTION 2 — QUAND $T = 40^{\circ}\text{C}$ ?

$$\begin{aligned} \text{On résout : } 20 + 60 \times e^{-0,1t} &= 40 \\ 60 \times e^{-0,1t} &= 20 \\ e^{-0,1t} &= 20/60 = 1/3 \\ -0,1t &= \ln(1/3) = -\ln(3) \\ t &= \ln(3) / 0,1 = 10 \times \ln(3) \approx 10 \times 1,099 \\ t &\approx 11,0 \text{ min} \end{aligned}$$

### Graphique : $T(t) = 20 + 60 \times e^{-0,1t}$



*La température tend asymptotiquement vers  $20^\circ\text{C}$  (température ambiante).*

#### MODÈLE GÉNÉRAL — LOI DE NEWTON

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}}) \times e^{-kt}$$

- $T_{\text{amb}}$  : température ambiante (valeur limite — asymptote horizontale)
- $T_0$  : température initiale (en  $t = 0$ )
- $k > 0$  : constante de refroidissement du système
- Plus  $k$  est grand, plus le refroidissement est rapide.

### CONTEXTE PROFESSIONNEL ERA / TMA

**Situation :** Une planche de bois vient d'être débitée. Sa teneur en humidité initiale est 25 %. Elle sèche naturellement selon le modèle :

$$H(t) = 25 \times e^{-0,08t}$$

où  $H$  est la teneur en humidité en % et  $t$  en heures.

**Norme bois de menuiserie :**  $H < 12\%$  requis pour les travaux intérieurs.

### QUAND ATTEINT-ON $H < 12\%$ ?

$$\text{On résout : } 25 \times e^{-0,08t} = 12$$

$$e^{-0,08t} = 12/25 = 0,48$$

$$-0,08t = \ln(0,48)$$

$$t = -\ln(0,48) / 0,08$$

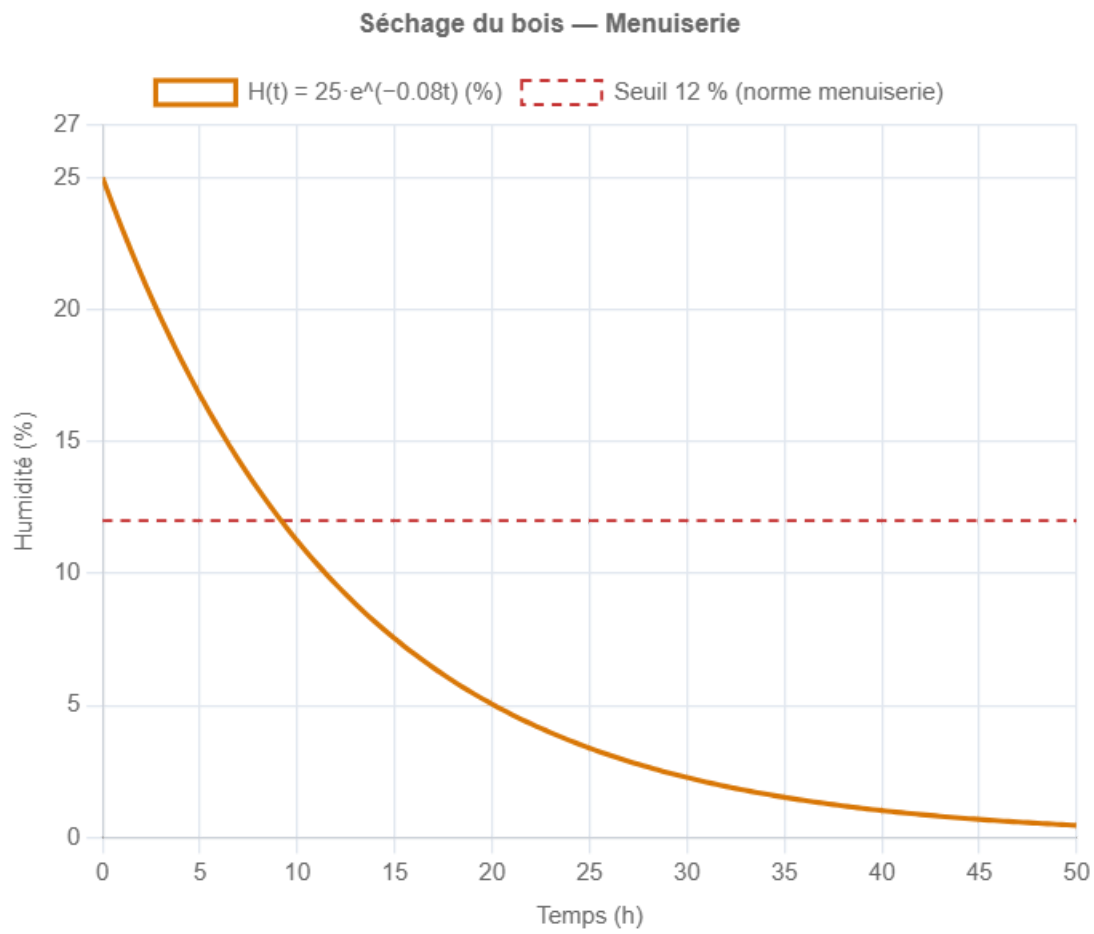
$$\ln(0,48) \approx -0,7340$$

$$t = 0,7340 / 0,08$$

$$t \approx 9,2 \text{ heures}$$

Il faut attendre un peu plus de **9 heures** pour que le bois soit conforme à la norme menuiserie.

## Graphique : $H(t) = 25 \times e^{-0,08t}$



*La droite rouge tiretée indique le seuil normatif de 12%.*

## 8. Tableau récapitulatif

| Notion                          | $e^x$                                   | $\ln(x)$                                  |
|---------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------|
| Domaine                         | $\mathbb{R}$                            | $]0; +\infty[$                            |
| Valeurs notables                | $e^0=1$ ; $e^1=e$                       | $\ln(1)=0$ ; $\ln(e)=1$                   |
| Dérivée                         | $(e^x)' = e^x$                          | $(\ln x)' = 1/x$                          |
| Dérivée (composée)              | $(e^u)' = u' \times e^u$                | $(\ln u)' = u'/u$                         |
| Primitive de base               | $\int e^x dx = e^x + C$                 | $\int (1/x) dx = \ln x  + C$              |
| Variations                      | Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ | Strictement croissante sur $]0; +\infty[$ |
| Limite en $-\infty$ (ou $0^+$ ) | $\lim = 0^+$                            | $\lim = -\infty$                          |
| Limite en $+\infty$             | $\lim = +\infty$                        | $\lim = +\infty$                          |
| Propriété clé                   | $e^{a+b} = e^a \times e^b$              | $\ln(ab) = \ln a + \ln b$                 |
| Réciprocité                     | $\ln(e^x) = x$                          | $e^{\ln(x)} = x$                          |

## 9. À retenir

### L'essentiel du chapitre :

- $e \approx 2,718$  est la *base naturelle* ; c'est une constante comme  $\pi$ .
- $e^x$  : unique fonction égale à sa dérivée —  $(e^x)' = e^x$  ; toujours positive, toujours croissante.
- $\ln(x)$  = exposant de  $e$  pour obtenir  $x$  ;  $\ln$  est l'inverse de l'exponentielle.
- Propriétés :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  ;  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  ;  $\ln(a^n) = n \ln a$ .
- Résolution :  $e^x = a \Rightarrow x = \ln(a)$  ;  $\ln(x) = b \Rightarrow x = e^b$ .
- Modèles :  $T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$  (Newton) ;  $H(t) = H_0 e^{-kt}$  (séchage).

## 10. Exercices corrigés

### Exercice 1 — Simplifier sans calculatrice

Simplifier les expressions suivantes :

a)  $\ln(e^5)$    b)  $e^{\ln(7)}$    c)  $\ln(e^3 \times e^2)$    d)  $\ln(e / e^3)$

► Voir la correction

### Exercice 2 — Résoudre des équations

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $]0; +\infty[$  :

a)  $e^x = 12$    b)  $2e^{3x} - 8 = 0$    c)  $\ln(x) = -2$    d)  $\ln(x + 3) = 1$

► Voir la correction

### Exercice 3 — Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de chaque fonction :

a)  $f(x) = e^{4x-1}$    b)  $g(x) = \ln(x^2 + 3)$    c)  $h(x) = 3e^{-2x} + \ln(5x)$

► Voir la correction

### Exercice 4 — Problème professionnel (installation thermique)

Un local technique est à  $60^\circ\text{C}$ . L'extérieur est à  $10^\circ\text{C}$ . Constante  $k = 0,05 \text{ min}^{-1}$ .

Modèle :  $T(t) = 10 + 50 \times e^{-0,05t}$

a) Calculer  $T(20)$ .   b) Au bout de combien de minutes  $T < 25^\circ\text{C}$  ?

► Voir la correction

## Erreurs fréquentes

### ✗ Appliquer $\ln$ à un nombre négatif ou nul

$\ln(x)$  n'est défini que pour  $x > 0$ .

*Conseil : avant d'appliquer  $\ln$ , vérifier que l'expression est strictement positive.*

### ✗ Confondre $\ln(a + b)$ et $\ln(a) + \ln(b)$

$\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b)$ . La propriété s'applique au produit.

*Conseil :  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$  — mémoriser avec la multiplication.*

### ✗ Oublier d'inverser l'inégalité

Si on divise par un nombre négatif dans une inéquation, le sens change.

*Conseil : vérifier le signe du coefficient lors de chaque division dans une inéquation.*

### ✗ Confondre $e^x$ et $xe$

$e^2 \neq 2e$ .  $e^2$  est la base  $e$  élevée à la puissance 2  $\approx 7,389$ .

*Conseil : utiliser les règles de puissance —  $e^x$  se comporte comme  $a^x$  avec  $a = e \approx 2,718$ .*

Simulation interactive

[Fonctions exponentielles et logarithme](#)

# Fonctions logarithme népérien et exponentielle

Fonctions ln et exponentielle | Terminale Bac Pro | ERA · TMA · ICCER  
(Groupement B)

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

## Compétences travaillées :

- Simplifier des expressions contenant  $e^x$  et  $\ln(x)$
- Résoudre des équations du type  $e^x = a$  et  $\ln(x) = b$
- Calculer les dérivées de  $e^{u(x)}$  et  $\ln(u(x))$
- Étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de la dérivée
- Modéliser une situation professionnelle avec une fonction exponentielle ou logarithmique

## EXERCICE 1 Simplifier des expressions avec e et ln

SOCLE

Simplifier chaque expression :

a)  $e^{\ln 3}$

b)  $\ln(e^5)$

c)  $e^0$

d)  $\ln(1)$

e)  $e^{\ln 1}$

f)  $\ln(e)$

Réponses : .....

**EXERCICE 2** Passer de la forme exponentielle à la forme logarithmique

SOCLE

Réécrire chaque égalité sous l'autre forme (exponentielle  $\leftrightarrow$  logarithmique) :

- a)  $e^x = 7 \rightarrow$  écrire sous forme logarithmique.
- b)  $\ln(x) = 4 \rightarrow$  écrire sous forme exponentielle.
- c)  $e^2 = a \rightarrow$  écrire sous forme logarithmique.
- d)  $\ln(10) = b \rightarrow$  écrire sous forme exponentielle.

Réponses : .....

**EXERCICE 3** Propriétés du logarithme népérien

SOCLE

Utiliser les propriétés de  $\ln$  pour simplifier les expressions suivantes :

- a)  $\ln(2) + \ln(5)$
- b)  $\ln(12) - \ln(3)$
- c)  $3 \ln(2)$
- d)  $\ln(2) + \ln(3) + \ln(7)$

⚠ Rappels :  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$  |  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  |  $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Réponses : .....

#### EXERCICE 4 Calculer des valeurs de exp et ln — pas à pas

SOCLE

##### Méthode

##### Touches de la calculatrice :

- Pour calculer  $e^x$  : taper la valeur de  $x$ , puis appuyer sur la touche  $e^x$  (ou 2nde + ln).
- Pour calculer  $\ln(x)$  : taper la valeur de  $x$ , puis appuyer sur la touche ln.
- Rappel :  $e^{\ln a} = a$  et  $\ln(e^x) = x$ .

1. Compléter le tableau à la calculatrice (arrondir au centième) :

| $x$   | 0                    | 1                    | 2                    | -1                   | 0,5                  |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $e^x$ | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> |

2. Compléter le tableau à la calculatrice (arrondir au centième) :

| $x$      | 1                    | 2                    | 10                   | 0,5                  | 100                  |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\ln(x)$ | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> |

3. QCM — Cocher la bonne réponse :

$$e^0 = \quad \square 0 \quad \square 1 \quad \square e$$

$$\ln(1) = \quad \square 0 \quad \square 1 \quad \square e$$

$$e^{\ln 5} = \quad \square \ln 5 \quad \square 5 \quad \square e^5$$

$$\ln(e^3) = \quad \square e^3 \quad \square 3 \quad \square \ln 3$$

## EXERCICE 5 Résoudre des équations exponentielles — pas à pas

SOCLE

### Méthode

Résoudre  $e^x = k$  :

- Si  $k > 0$  : on applique  $\ln$  des deux côtés  $\rightarrow x = \ln(k)$ .
- Si  $k \leq 0$  :

**pas de solution**

car  $e^x > 0$  toujours.

- Puis on calcule  $\ln(k)$  à la calculatrice.

1. Résoudre  $e^x = 4$ . Compléter :

On applique  $\ln$  des deux côtés :

$$\ln(e^x) = \ln(4)$$

$$x = \ln(4)$$

À la calculatrice :  $x \approx \boxed{\phantom{00}}$

2. Résoudre  $e^x = 10$ . Compléter :

$$x = \ln(\boxed{\phantom{00}})$$

À la calculatrice :  $x \approx \boxed{\phantom{00}}$

3. Résoudre  $5e^x = 15$ . Compléter :

$$\text{On isole d'abord } e^x : e^x = \frac{15}{5} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$\text{Puis : } x = \ln(\boxed{\phantom{00}}) \approx \boxed{\phantom{00}}$$

4. L'équation  $e^x = -2$  a-t-elle une solution ? Justifier.

---

**EXERCICE 6** Refroidissement d'un atelier — problème guidé

SOCLE

**Contexte :** Un technicien chauffagiste coupe le chauffage d'un atelier pour une intervention. La température de l'atelier (en °C) est modélisée par :

$$T(t) = 15 + 10e^{-0,1t}$$

où  $t$  est le temps en minutes après l'arrêt du chauffage.

**Méthode**

**Lire une fonction exponentielle**  $T(t) = a + be^{-kt}$  :

- Température initiale : remplacer  $t$  par 0, on obtient  $T(0) = a + b$ .
- Température limite (quand  $t \rightarrow +\infty$ ) :  $e^{-kt} \rightarrow 0$ , donc  $T \rightarrow a$ .

1. Calculer la température initiale. Compléter :

$$T(0) = 15 + 10 \times e^0 = 15 + 10 \times \square = \square \text{ °C}$$

2. Vers quelle température l'atelier va-t-il tendre ? Compléter :

$$\text{Quand } t \rightarrow +\infty, e^{-0,1t} \rightarrow \square, \text{ donc } T \rightarrow 15 + 10 \times 0 = \square \text{ °C}$$

3. Calculer la température après 10 minutes. Compléter :

$$T(10) = 15 + 10 \times e^{-0,1 \times 10} = 15 + 10 \times e^{-1}$$

$$\text{À la calculatrice : } e^{-1} \approx \square$$

$$T(10) \approx 15 + 10 \times 0,368 = \square \text{ °C}$$

4. Le technicien veut que la température soit à 18 °C. Résoudre  $T(t) = 18$ . Compléter :

$$15 + 10e^{-0,1t} = 18$$

$$10e^{-0,1t} = 18 - 15 = \square$$

$$e^{-0,1t} = \frac{3}{10} = \square$$

$$-0,1t = \ln(0,3) \approx \boxed{\phantom{00}}$$

$$t = \frac{-\ln(0,3)}{0,1} \approx \boxed{\phantom{00}} \text{ minutes}$$

### EXERCICE 7 Simplifier des expressions avec les propriétés de exp (guidé)

SOCLE

**Rappel** Propriétés :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$  |  $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$  |  $e^0 = 1$  |  $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

Simplifier chaque expression :

a)  $e^2 \times e^3$

On additionne les exposants :  $e^2 \times e^3 = e^{2+\boxed{\phantom{00}}} = e^{\boxed{\phantom{00}}}$

b)  $\frac{e^7}{e^4}$

On soustrait les exposants :  $\frac{e^7}{e^4} = e^{7-\boxed{\phantom{00}}} = e^{\boxed{\phantom{00}}}$

c)  $(e^2)^3$

On multiplie les exposants :  $(e^2)^3 = e^{2 \times \boxed{\phantom{00}}} = e^{\boxed{\phantom{00}}}$

d)  $e^5 \times e^{-2}$

$e^5 \times e^{-2} = e^{5+(-2)} = e^{\boxed{\phantom{00}}}$

**EXERCICE 8** Résoudre des équations logarithmiques (guidé)

SOCLE

**Méthode****Résoudre  $\ln(x) = k$  :**On applique l'exponentielle des deux membres  $\rightarrow x = e^k$ .Rappel :  $\ln$  et  $e^{\cdot}$  sont des fonctions réciproques :  $\ln(e^k) = k$  et  $e^{\ln x} = x$ .**1. Résoudre  $\ln(x) = 2$ . Compléter :**On applique l'exponentielle :  $e^{\ln(x)} = e^2$ Donc  $x = e^{\square} \approx \square$ **2. Résoudre  $\ln(x) = 0$ . Compléter :** $x = e^{\square} = \square$ **3. Résoudre  $\ln(x) = -1$ . Compléter :** $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \square$ **4. L'équation  $\ln(x) = 5$  a-t-elle une solution ? Calculer cette solution (à 2 décimales près).**

---

**EXERCICE 9 Lire une courbe exponentielle — croissance et décroissance****SOCLE**

**Contexte :** Un plombier chauffagiste chauffe un ballon d'eau chaude. La température (en °C) monte selon le modèle  $T(t) = 60 - 40e^{-0,2t}$  où  $t$  est en minutes.

**Lecture du modèle  $T(t) = a - be^{-kt}$**  Température initiale ( $t = 0$ ) :  $T(0) = a - b$ .  
Température limite ( $t \rightarrow +\infty$ ) :  $T \rightarrow a$ .

1. Calculer la température initiale de l'eau.

$$T(0) = 60 - 40 \times e^0 = 60 - 40 \times \square = \square \text{ °C}$$

2. Vers quelle température tend l'eau quand  $t \rightarrow +\infty$  ?

$$e^{-0,2t} \rightarrow \square \text{ quand } t \rightarrow +\infty, \text{ donc } T \rightarrow \square \text{ °C}$$

3. Calculer  $T(5)$  et  $T(10)$ .

---

4. La douche peut être utilisée à partir de 50 °C. Résoudre  $T(t) = 50$ .

$$60 - 40e^{-0,2t} = 50$$

$$40e^{-0,2t} = 60 - 50 = \square$$

$$e^{-0,2t} = \frac{10}{40} = \square$$

$$-0,2t = \ln(0,25) \approx \square$$

$$t \approx \frac{1,386}{0,2} = \square \text{ min}$$

**EXERCICE 10** Identifier les valeurs remarquables de  $\ln$  et  $\exp$  (guidé)

SOCLE

**Rappel** Valeurs importantes :  $e^0 = 1$  |  $e^1 = e \approx 2,718$  |  $\ln(1) = 0$  |  $\ln(e) = 1$  |  
 $e^{\ln a} = a$  |  $\ln(e^k) = k$

Sans calculatrice, compléter :

a)  $e^{\ln 7} = \square$

b)  $\ln(e^{10}) = \square$

c)  $\ln(e^{-3}) = \square$

d)  $e^{\ln(0,5)} = \square$

e)  $\ln(1) + e^0 = \square + \square = \square$

f) Si  $e^x = e^4$ , alors  $x = \square$

g) Si  $\ln(x) = \ln(5)$ , alors  $x = \square$

**EXERCICE 7** Résoudre des équations avec l'exponentielle

STANDARD

Résoudre chaque équation. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

a)  $e^x = 5$

b)  $e^x = 0,3$

c)  $e^{2x} = 12$

d)  $3e^x = 21$

Réponses : .....

**EXERCICE 8** Résoudre des équations avec le logarithme

STANDARD

Résoudre chaque équation. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

a)  $\ln(x) = 3$

b)  $\ln(x) = -1$

c)  $\ln(2x) = 4$

d)  $\ln(x) + \ln(5) = \ln(20)$

Réponses : .....

**EXERCICE 9** Dérivées de fonctions exponentielles et logarithmes

STANDARD

Calculer la dérivée de chaque fonction :

a)  $f(x) = e^x$

b)  $g(x) = \ln(x)$

c)  $h(x) = 5e^x + 3$

d)  $k(x) = 2\ln(x) - x$

⚠ Rappels :  $(e^x)' = e^x$  |  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$

Réponses : .....

**EXERCICE 11** Propriétés du logarithme — développer et factoriser

STANDARD

Utiliser les propriétés de  $\ln$  pour transformer chaque expression :

- a) Développer  $\ln\left(\frac{x^3}{y^2}\right)$
- b) Factoriser  $\ln(4) + 2\ln(3)$
- c) Simplifier  $\ln(e^{2x+1})$
- d) Exprimer  $\ln(\sqrt{x})$  sous forme d'un multiple de  $\ln(x)$

**EXERCICE 12** Étudier les variations de  $f(x) = e^{-x} + x$ 

STANDARD

On considère la fonction  $f(x) = e^{-x} + x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- 1. Calculer  $f'(x)$ .
- 2. Résoudre  $f'(x) = 0$  (chercher  $x$  tel que  $e^{-x} = 1$ ).
- 3. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[-2; 4]$ .
- 4. Calculer le minimum de  $f$ .

**EXERCICE 13** Résoudre des équations mêlant exp et ln

STANDARD

Résoudre chaque équation (donner la valeur exacte puis approchée à  $10^{-2}$ ) :

a)  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

*Indication : poser  $X = e^x$  et résoudre l'équation du second degré en  $X$ .*

b)  $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(6)$

*Indication : utiliser  $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ .*

c)  $e^x = e^{2-x}$

## EXERCICE 14

### Dériver des fonctions exponentielles composées — contexte professionnel

#### STANDARD

**Contexte :** Un technicien de maintenance énergétique modélise l'efficacité d'un isolant en fonction de son épaisseur. La résistance thermique suit une loi exponentielle, et il doit calculer la dérivée pour trouver l'épaisseur optimale.

Calculer la dérivée de chaque fonction :

a)  $f(x) = e^{3x-2}$

b)  $g(x) = 3e^{-0,5x} + 2x$

c)  $h(x) = x^2 e^x$

d)  $k(x) = \ln(x^2 + 4)$

## EXERCICE 15 Croissance de la population bactérienne

#### STANDARD

**Contexte :** Un technicien en traitement de l'eau surveille la prolifération d'une bactérie dans un circuit de chauffage. Le nombre de bactéries (en milliers) est modélisé par  $N(t) = 2e^{0,3t}$  où  $t$  est le temps en heures.

1. Quelle est la population initiale ?
2. Calculer  $N(5)$  et  $N(10)$ . La croissance s'accélère-t-elle ?
3. Le traitement doit être déclenché quand  $N(t) \geq 50$  (milliers). Résoudre cette inéquation.
4. Calculer  $N'(t)$ . Interpréter : la population augmente-t-elle plus vite au début ou après plusieurs heures ?

**EXERCICE 16** Comparaison  $\exp$  et  $\ln$  — étude graphique

STANDARD

On considère les fonctions  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = \ln(x)$  pour  $x > 0$ .

1. Rappeler la dérivée de  $f$  et de  $g$ .
2. Expliquer pourquoi les courbes de  $f$  et  $g$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .
3. Résoudre  $e^x = x^2$  numériquement en complétant le tableau :

|       |      |      |      |     |     |
|-------|------|------|------|-----|-----|
| $x$   | -0,7 | -0,5 | -0,3 | 1,1 | 1,3 |
| $e^x$ |      |      |      |     |     |
| $x^2$ |      |      |      |     |     |

À quel(s) endroit(s) les courbes se croisent-elles approximativement ?

4. Pour  $x > 0$ , laquelle des deux fonctions  $e^x$  ou  $\ln(x)$  croît plus vite ? Justifier en comparant les dérivées.

**EXERCICE 17** Modèle de croissance logistique simplifié

STANDARD

**Contexte :** Un ingénieur thermicien modélise l'évolution du taux d'adoption d'une nouvelle technologie de chauffage (pompes à chaleur) dans une région. La fonction  $P(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,5t}}$  représente le pourcentage de foyers équipés ( $t$  en années).

1. Calculer  $P(0)$ . Quel était le taux initial d'adoption ?
2. Calculer  $P(4)$  et  $P(10)$  (arrondir à 1 décimale).
3. Vers quel pourcentage tend  $P(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ? (Indice : que vaut  $e^{-0,5t}$  ?).
4. Résoudre  $P(t) = 50$  pour trouver la date à laquelle la moitié des foyers sera équipée.

**EXERCICE 10** Dérivées de fonctions composées**APPROFONDISSEMENT**

Calculer la dérivée de chaque fonction :

a)  $f(x) = e^{2x+1}$

b)  $g(x) = e^{-3x}$

c)  $h(x) = \ln(3x)$  pour  $x > 0$

d)  $k(x) = \ln(x^2 + 1)$

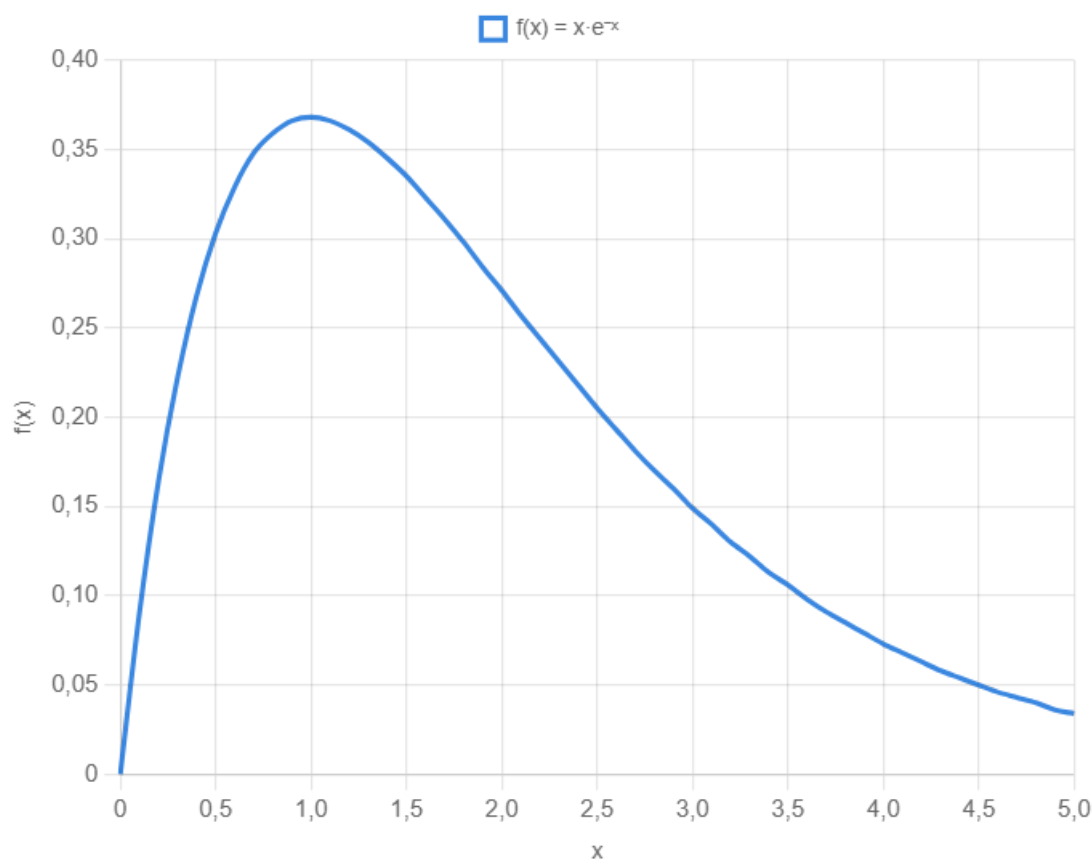
⚠ Formules :  $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$  |  $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Réponses : .....

**EXERCICE 11 Étude de variations d'une fonction exponentielle****APPROFONDISSEMENT**

On considère la fonction  $f(x) = x e^{-x}$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

1. Calculer  $f'(x)$ . On montrera que  $f'(x) = (1 - x) e^{-x}$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$  sachant que  $e^{-x} > 0$  pour tout  $x$ .
3. En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 5]$ .
4. Quel est le maximum de  $f$  ? Pour quelle valeur de  $x$  est-il atteint ?



Courbe de  $f(x) = x e^{-x}$  sur  $[0; 5]$

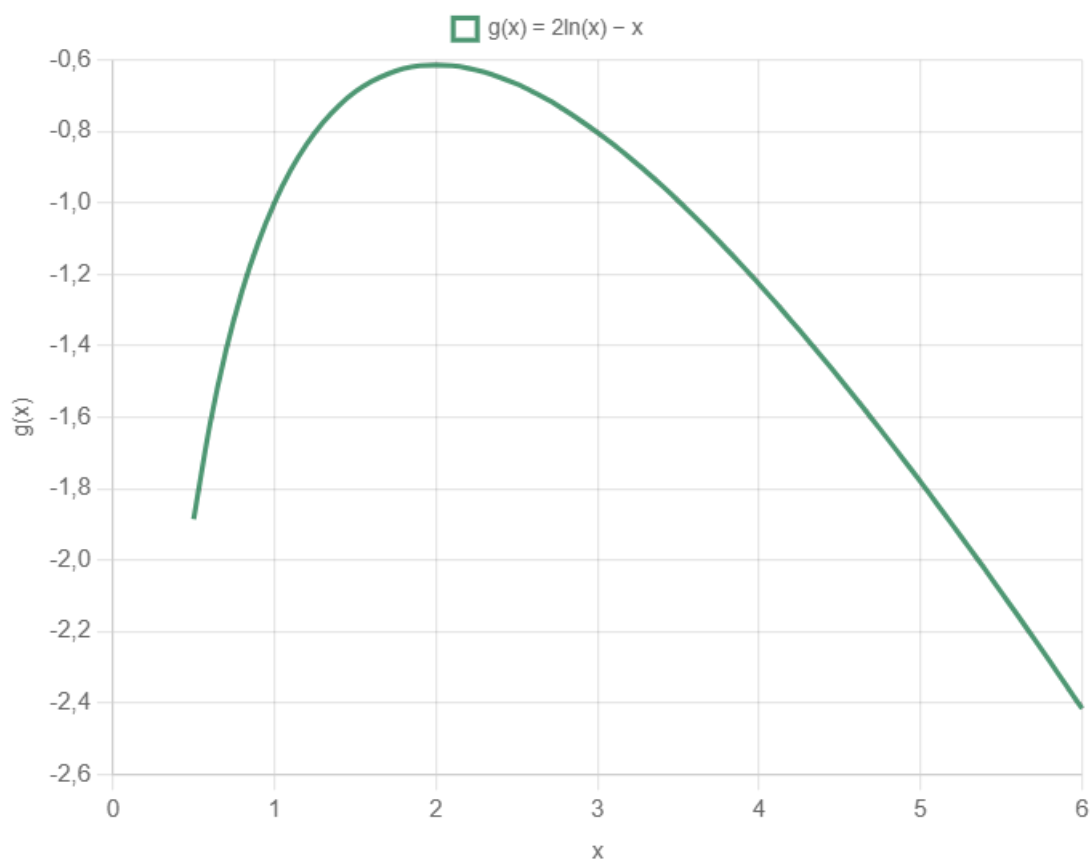
Réponses : .....

**EXERCICE 12** Étude de variations d'une fonction logarithme

APPROFONDISSEMENT

On considère la fonction  $g(x) = 2 \ln(x) - x$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

1. Calculer  $g'(x)$ .
2. Résoudre  $g'(x) = 0$ .
3. Étudier le signe de  $g'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $[0,5; 6]$ .
4. Calculer la valeur du maximum de  $g$ .



Courbe de  $g(x) = 2 \ln(x) - x$  sur  $[0,5; 6]$

Réponses : .....

**EXERCICE 13** Refroidissement d'un circuit de chauffage

APPROFONDISSEMENT

**Contexte :** Un technicien chauffagiste contrôle le refroidissement d'un circuit de chauffage après l'arrêt de la chaudière. La loi de Newton modélise la température du fluide en fonction du temps.

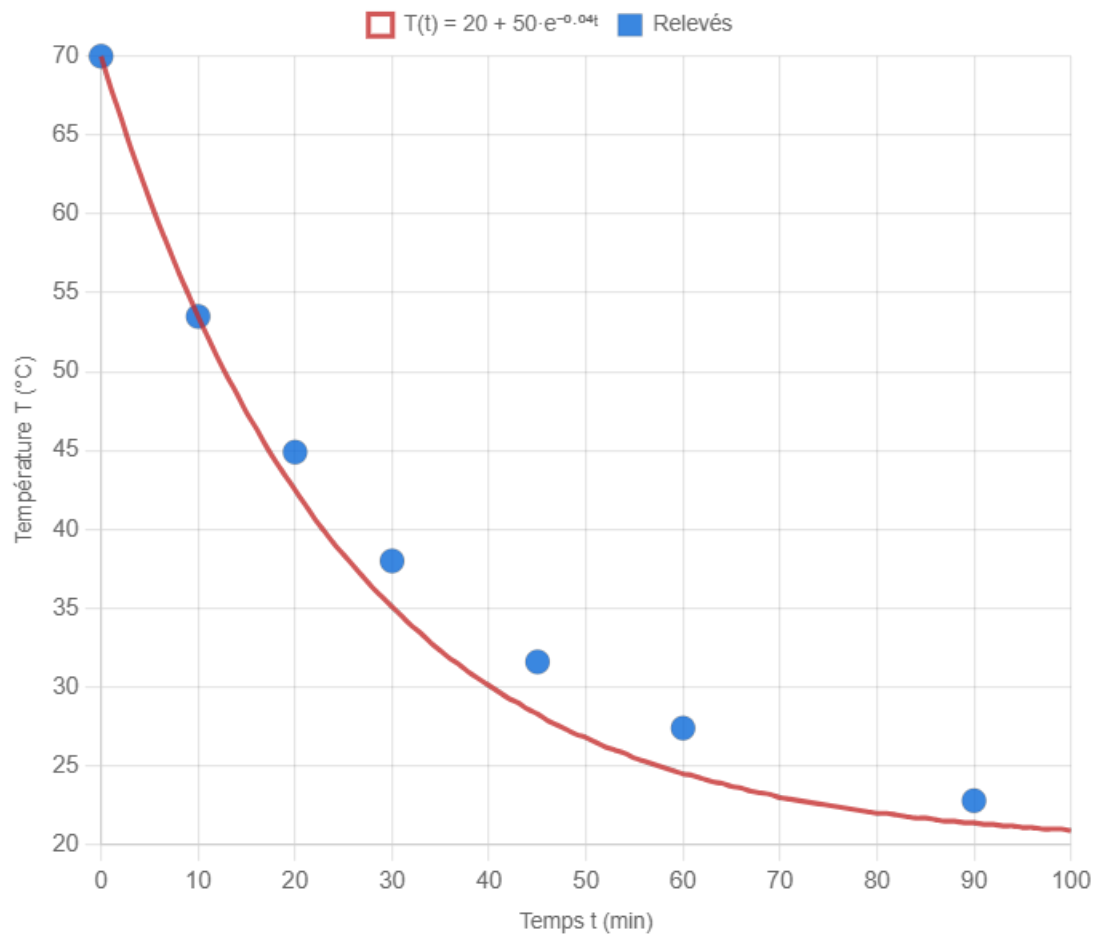
La température  $T$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ) du fluide caloporteur est modélisée par :

$$T(t) = 20 + 50e^{-0,04t}$$

où  $t$  est le temps en minutes après l'arrêt de la chaudière.

|                               |    |      |      |      |      |      |      |
|-------------------------------|----|------|------|------|------|------|------|
| $t$ (min)                     | 0  | 10   | 20   | 30   | 45   | 60   | 90   |
| $T(t)$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | 70 | 53,5 | 44,9 | 38,0 | 31,6 | 27,4 | 22,8 |

1. Quelle est la température initiale du fluide ? Quelle est la température ambiante ?
2. Calculer  $T(15)$ . Arrondir à 0,1  $^{\circ}\text{C}$ .
3. Le technicien doit intervenir sur le circuit quand la température atteint 30  $^{\circ}\text{C}$ .  
Résoudre  $T(t) = 30$  pour trouver le temps d'attente.
4. Calculer  $T'(t)$ . La température descend-elle de plus en plus vite ou de plus en plus lentement ? Justifier.
5. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de  $T(t)$ . Vérifier graphiquement les résultats des questions 2 et 3.



Température du fluide  $T$  (°C) en fonction du temps  $t$  (min)

Réponses : .....

**EXERCICE 14** Séchage du bois en atelier**APPROFONDISSEMENT**

**Contexte :** Un menuisier agenceur surveille le séchage de panneaux de chêne dans un séchoir industriel. Le taux d'humidité diminue selon un modèle exponentiel.

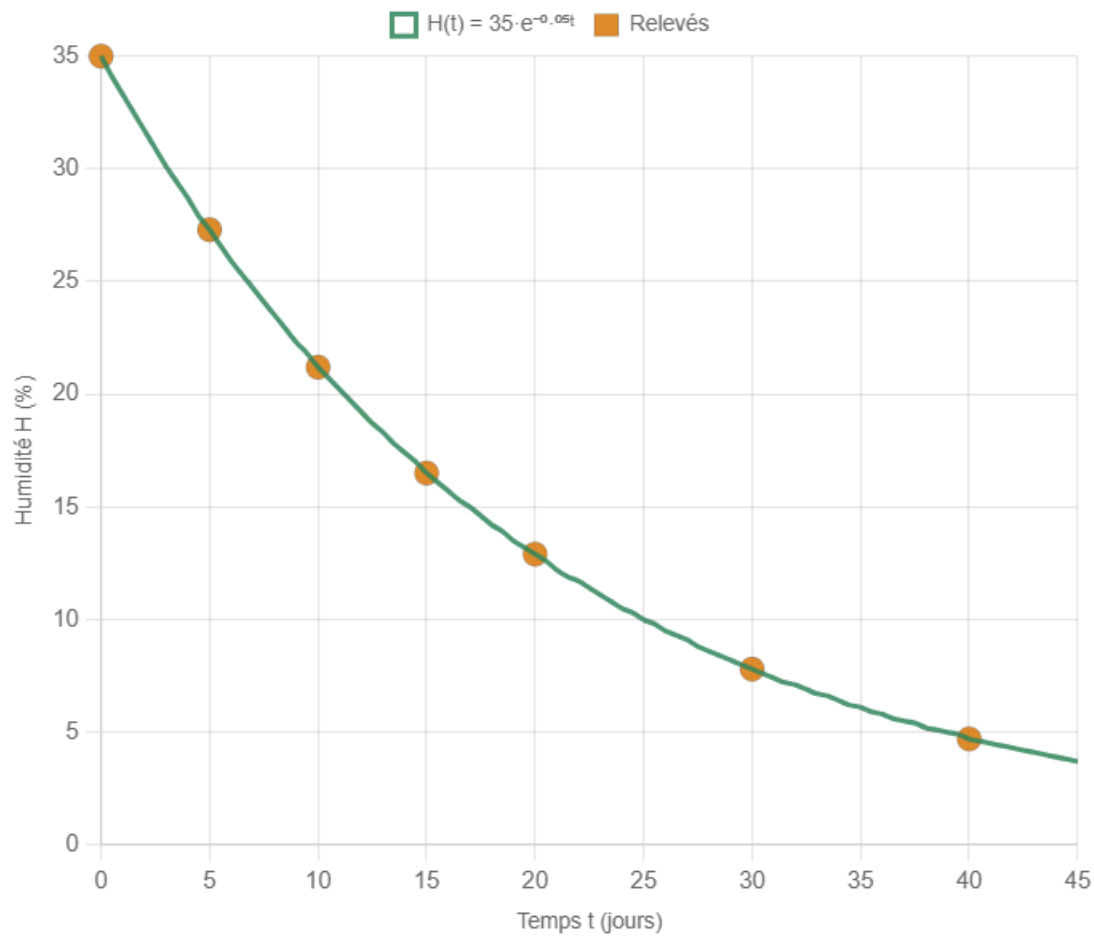
Le taux d'humidité  $H$  (en %) du bois est modélisé par :

$$H(t) = 35 e^{-0,05 t}$$

où  $t$  est le temps en jours.

|             |      |      |      |      |      |     |     |
|-------------|------|------|------|------|------|-----|-----|
| $t$ (jours) | 0    | 5    | 10   | 15   | 20   | 30  | 40  |
| $H(t)$ (%)  | 35,0 | 27,3 | 21,2 | 16,5 | 12,9 | 7,8 | 4,7 |

1. Quel est le taux d'humidité initial du bois ?
2. Calculer le taux d'humidité après 12 jours. Arrondir à 0,1 %.
3. Le bois est utilisable en agencement lorsque son taux d'humidité atteint 12 %. Résoudre  $H(t) = 12$  pour déterminer le temps de séchage nécessaire.
4. Le menuisier veut atteindre 8 % pour un parquet haut de gamme. Combien de jours faut-il ?
5. Calculer  $H'(t)$  et interpréter son signe.



*Taux d'humidité  $H$  (%) en fonction du temps  $t$  (jours)*

Réponses : .....

**EXERCICE 15** Rendement d'une pompe à chaleur**APPROFONDISSEMENT**

**Contexte :** Un installateur thermicien étudie le rendement d'une pompe à chaleur (PAC) en fonction de la température extérieure. Le COP (coefficient de performance) est modélisé par une fonction logarithmique.

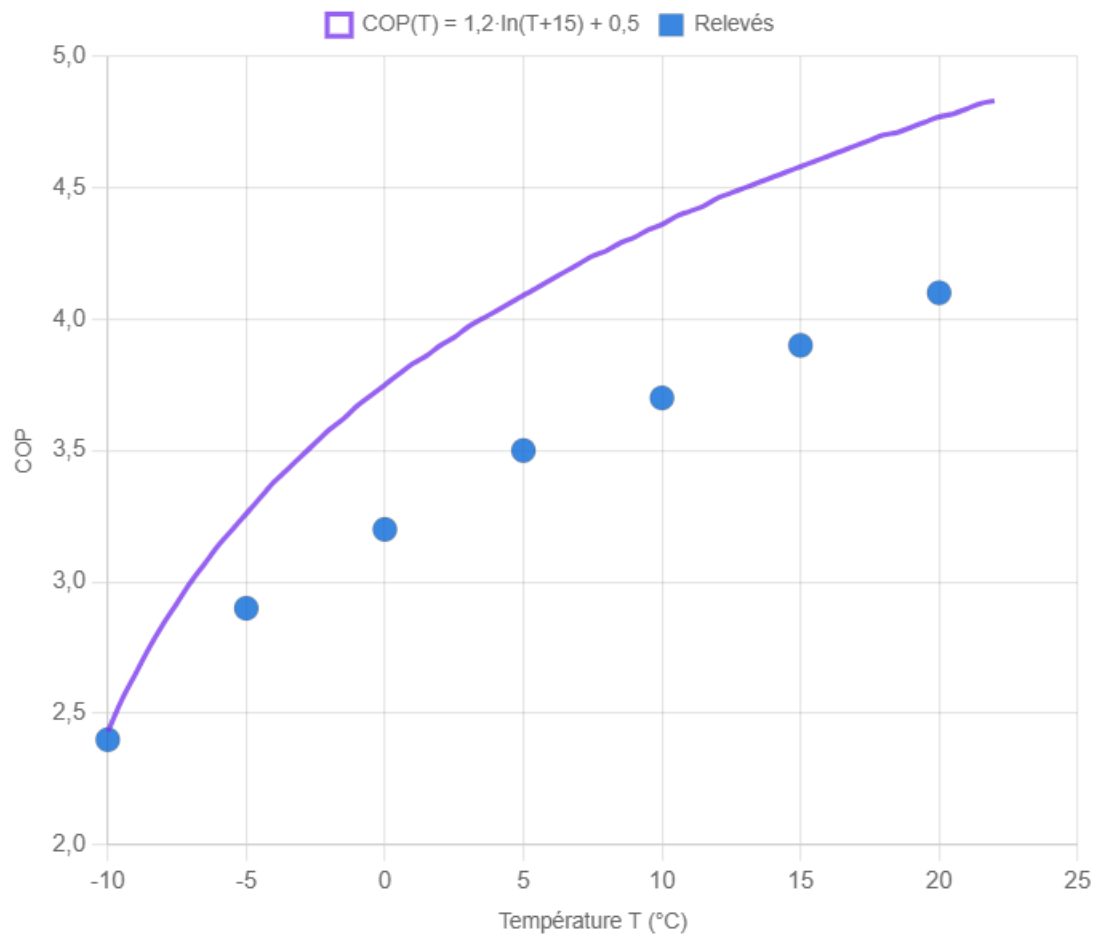
Le COP de la PAC est modélisé par :

$$\text{COP}(T) = 1,2 \ln(T + 15) + 0,5$$

où  $T$  est la température extérieure (en °C), pour  $T \geq -10$  °C.

|          |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $T$ (°C) | -10 | -5  | 0   | 5   | 10  | 15  | 20  |
| COP      | 2,4 | 3,3 | 3,7 | 4,1 | 4,4 | 4,6 | 4,8 |

1. Calculer le COP pour  $T = 7$  °C. Arrondir à 0,1.
2. Un COP de 3 signifie que pour 1 kWh d'électricité consommé, la PAC produit 3 kWh de chaleur. En dessous de quelle température le COP est-il inférieur à 3 ?
3. Calculer  $\text{COP}'(T)$ . La PAC est-elle plus efficace quand il fait chaud ou quand il fait froid ?
4. Le gain de COP entre  $-5$  °C et  $0$  °C est-il le même qu'entre  $15$  °C et  $20$  °C ? Justifier par le calcul.



*COP de la PAC en fonction de la température extérieure  $T$  (°C)*

Réponses : .....

### EXERCICE 18 Étude complète d'une fonction exponentielle

APPROFONDISSEMENT

On considère la fonction  $f(x) = (x - 1)e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $f'(x)$  (produit de deux fonctions).
2. Résoudre  $f'(x) = 0$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[-3; 3]$ .
4. Calculer le minimum de  $f$ .
5. Déterminer les intervalles sur lesquels  $f(x) > 0$ .

### EXERCICE 19 Modélisation du vieillissement d'un isolant thermique

APPROFONDISSEMENT

**Contexte :** Un bureau d'études thermiques modélise la résistance thermique  $R$  (en  $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$ ) d'une laine de verre en fonction de son âge  $t$  (en années). La résistance diminue selon la loi :  $R(t) = 4,5 e^{-0,02t}$ .

1. Quelle est la résistance initiale de l'isolant (neuf) ?
2. Calculer  $R(10)$ ,  $R(20)$  et  $R(40)$ . Interpréter l'évolution.
3. La réglementation thermique exige  $R \geq 3,5 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ . Résoudre l'inéquation  $R(t) \geq 3,5$  pour trouver la durée de vie conforme de l'isolant.
4. Calculer  $R'(t)$  et l'interpréter. Le vieillissement s'accélère-t-il ou ralentit-il ?
5. De combien de pour cent la résistance a-t-elle chuté après 25 ans ?

## EXERCICE 20 Étude d'une fonction logarithmique — optimisation

### APPROFONDISSEMENT

**Contexte :** Un menuisier agenceur étudie le bénéfice (en centaines d'euros) d'une commande en fonction du nombre de pièces fabriquées  $x$  (en centaines). Il modélise :  $B(x) = 3 \ln(x) - x + 2$  pour  $x > 0$ .

1. Calculer  $B'(x)$  et résoudre  $B'(x) = 0$ .
2. Étudier le signe de  $B'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $B$  sur  $[0,5 ; 10]$ .
3. Calculer le bénéfice maximal. Pour quel nombre de pièces est-il atteint ?
4. Le bénéfice est positif ( $B(x) > 0$ ) pour quelles valeurs de  $x$  environ ? (Utiliser la calculatrice pour trouver les zéros de  $B$  par essais).
5. Interpréter le résultat en termes de gestion de production.

## EXERCICE 21 Modélisation d'une loi de Newton complète — type BTS

### APPROFONDISSEMENT

**Contexte :** Un ingénieur thermicien étudie la loi de Newton pour le refroidissement d'un fluide caloporteur dans un échangeur. La température  $T$  (en °C) vérifie l'équation différentielle :  $T'(t) = -k(T(t) - T_\infty)$  où  $k > 0$  et  $T_\infty$  est la température ambiante.

La solution générale est :  $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-kt}$ , où  $T_0 = T(0)$  est la température initiale.

On mesure :  $T_0 = 95$  °C,  $T_\infty = 20$  °C. À  $t = 5$  min :  $T(5) = 70$  °C.

1. Écrire l'expression de  $T(t)$  avec les valeurs numériques  $T_0$  et  $T_\infty$ .
2. En utilisant  $T(5) = 70$ , déterminer la constante  $k$  (arrondir à  $10^{-3}$ ).
3. Calculer  $T(15)$  et  $T(30)$ .
4. Résoudre  $T(t) = 40$  pour trouver à quel instant la température atteint 40 °C.
5. Calculer  $T'(t)$  et vérifier qu'on retrouve bien  $T'(t) = -k(T(t) - T_\infty)$ .

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir



Objectifs du chapitre

[cliquer pour développer](#)

Durée : 1 heure



Calculatrice : autorisée



Barème : 20 points



Documents : non autorisés

## Exercice 1 – Calculs avec exp et ln (guidé)

10 points

## Méthode

## Rappels :

- $e^{\ln a} = a$  pour tout  $a > 0$
- $\ln(e^x) = x$  pour tout  $x$
- $e^0 = 1$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$

## Partie A – Simplifications (3 pts)

1. Simplifier  $e^{\ln 5}$ . Compléter :  $e^{\ln 5} = \square$  car  $e^{\ln a} = \dots$ 2. Simplifier  $\ln(e^4)$ . Compléter :  $\ln(e^4) = \square$  car  $\ln(e^x) = \dots$ 

3. QCM — Cocher la bonne réponse :

 $e^0 =$  ☐ 0 ☐ 1 ☐ e $\ln(1) =$  ☐ 0 ☐ 1 ☐ -1

## Partie B – Équations (guidées) (4 pts)

4. Résoudre  $e^x = 6$ . Compléter :

On applique  $\ln$  des deux côtés :  $\ln(e^x) = \ln(6)$

Donc  $x = \ln(\square)$

À la calculatrice :  $x \approx \square$

5. Résoudre  $\ln(x) = 2$ . Compléter :

On applique l'exponentielle des deux côtés :  $e^{\ln(x)} = e^2$

Donc  $x = e^{\square}$

À la calculatrice :  $x \approx \square$

6. Résoudre  $2e^x = 14$ . Compléter :

On isole  $e^x$  :  $e^x = \frac{14}{2} = \square$

Puis :  $x = \ln(\square) \approx \square$

### Partie C – Application (guidée) (3 pts)

**Contexte :** Un menuisier agenceur utilise une colle qui sèche selon la loi :

$R(t) = 100(1 - e^{-0,1t})$  où  $R$  est la résistance en % et  $t$  le temps en heures.

7. Calculer la résistance initiale  $R(0)$ . Compléter :

$$R(0) = 100(1 - e^0) = 100(1 - \square) = \square \%$$

8. Calculer  $R(10)$ . Compléter :

$$R(10) = 100(1 - e^{-0,1 \times 10}) = 100(1 - e^{-1})$$

À la calculatrice :  $e^{-1} \approx \square$

$$R(10) \approx 100(1 - 0,368) = \square \%$$

9. La colle est opérationnelle quand  $R(t) = 80 \%$ . Combien de temps faut-il attendre ?

$$100(1 - e^{-0,1t}) = 80$$

$$1 - e^{-0,1t} = \square$$

$$e^{-0,1t} = 1 - 0,8 = \square$$

$$-0,1t = \ln(\square)$$

$$t = \frac{-\ln(0,2)}{0,1} \approx \square \text{ heures}$$

## Exercice 2 – Température d'un atelier (guidé)

10 points

**Contexte :** Un technicien chauffagiste arrête un radiateur. La température de la pièce suit :  $T(t) = 18 + 12e^{-0,08t}$  où  $T$  est en °C et  $t$  en minutes.

### Méthode

Lire  $T(t) = a + be^{-kt}$  :

- Température initiale :  $T(0) = a + b$ .
- Température limite :  $T \rightarrow a$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

1. (2 pts) Calculer la température initiale  $T(0)$ . Compléter :

$$T(0) = 18 + 12 \times e^0 = 18 + 12 \times \square = \square \text{ °C}$$

2. (2 pts) Vers quelle température tend la pièce ? Compléter :

$$\text{Quand } t \rightarrow +\infty, e^{-0,08t} \rightarrow \square, \text{ donc } T \rightarrow \square \text{ °C.}$$

3. (2 pts) Calculer  $T(10)$  et  $T(20)$ . Arrondir au dixième.

$$T(10) = 18 + 12 \times e^{-0,08 \times 10} = 18 + 12 \times e^{-0,8}$$

$$\text{À la calculatrice : } e^{-0,8} \approx \square$$

$$T(10) \approx 18 + 12 \times 0,449 = \square \text{ °C}$$

4. (2 pts) Le technicien intervient quand  $T = 20$  °C. Résoudre. Compléter :

$$18 + 12e^{-0,08t} = 20$$

$$12e^{-0,08t} = 20 - 18 = \square$$

$$e^{-0,08t} = \frac{2}{12} = \square$$

$$-0,08t = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \approx \boxed{\phantom{000}}$$

$$t \approx \frac{1,792}{0,08} \approx \boxed{\phantom{000}} \text{ minutes}$$

5. (2 pts) Calculer  $T'(t)$  en complétant :

$$T'(t) = 12 \times (-0,08) \times e^{-0,08t} = \boxed{\phantom{000}} e^{-0,08t}$$

$T'(t)$  est toujours négatif car  $e^{-0,08t} > 0$ . La température est donc .....

## Exercice 1 – Calculs et dérivation

10 points

### Partie A – Simplifications (3 pts – 1 pt par question)

1. Simplifier  $e^{\ln 3}$ .

---

2. Simplifier  $\ln(e^5)$ .

---

3. Calculer  $e^0$ .

---

### Partie B – Équations (2 pts – 1 pt par question)

4. Résoudre  $e^x = 7$ . Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

---



---

5. Résoudre  $\ln(x) = 3$ . Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centième.

---



---

### Partie C – Dérivation (3 pts)

6. (1,5 pt) Calculer la dérivée de  $f(x) = e^{2x}$ .

---

---

7. (1,5 pt) Calculer la dérivée de  $g(x) = \ln(3x)$  pour  $x > 0$ .

---

---

**Partie D – Étude de variations** (2 pts)

8. Soit  $h(x) = x e^{-x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

a) Montrer que  $h'(x) = (1 - x) e^{-x}$ . (1 pt)

b) Étudier le signe de  $h'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $h$ . (1 pt)

---

---

---

---

**Exercice 2 – Refroidissement d'un radiateur**

10 points

**Contexte professionnel :** Un technicien chauffagiste arrête un radiateur pour effectuer une maintenance. La température du radiateur suit la loi de refroidissement de Newton :

$$T(t) = 20 + 160 e^{-0,05 t}$$

où  $T$  est la température en  $^{\circ}\text{C}$  et  $t$  le temps en minutes après l'arrêt.

1. (1 pt) Quelle est la température du radiateur à l'instant  $t = 0$  (au moment de l'arrêt) ?

---

2. (1 pt) Vers quelle température tend le radiateur quand  $t \rightarrow +\infty$  ? Interpréter physiquement.

---

---

3. (2 pts) Calculer la température du radiateur après 10 minutes, puis après 30 minutes. Arrondir au dixième.

4. (3 pts) Déterminer le temps nécessaire pour que la température atteigne 50 °C. Arrondir à la minute près.

5. (1,5 pt) Calculer  $T'(t)$  et vérifier que  $T'(t) < 0$  pour tout  $t$ . Qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

6. (1,5 pt) La constante de temps  $\tau$  de ce système est définie par  $\tau = \frac{1}{0,05}$ . Calculer  $\tau$  et expliquer sa signification : quelle fraction de l'écart initial de température reste-t-il après un temps égal à  $\tau$  ?

## Exercice 1 – Décroissance radioactive et datation

10 points

**Contexte :** Un laboratoire d'analyse utilise le carbone 14 pour dater un échantillon de bois retrouvé sur un chantier de rénovation. La quantité de carbone 14 (en  $\mu\text{g}$ ) suit une décroissance exponentielle :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

avec  $N_0 = 12 \mu\text{g}$  (quantité initiale) et  $\lambda = 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$ .

1. (1 pt) Vérifier que  $N(0) = 12 \mu\text{g}$ .

---

2. (2 pts) Calculer la quantité restante après 5 000 ans. Arrondir au dixième.

---

---

3. (2 pts) La *demi-vie*  $t_{1/2}$  est le temps pour que la quantité soit divisée par 2. Montrer que  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$  et calculer sa valeur.

---

---

---

4. (2 pts) L'analyse révèle qu'il reste  $3,5 \mu\text{g}$  dans l'échantillon. Déterminer l'âge du bois.

---

---

---

5. (1,5 pt) Calculer  $N'(t)$ . Étudier le signe de  $N'(t)$  et interpréter. La vitesse de désintégration est-elle constante ? Justifier.

---

---

---

6. (1,5 pt) Au bout de combien de demi-vies la quantité restante est-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Formaliser avec une inéquation.

---

---

---

## Exercice 2 – Optimisation d'un rendement énergétique

10 points

**Contexte :** Un ingénieur étudie le rendement énergétique  $\eta$  d'un système de récupération de chaleur en fonction de la surface d'échange  $x$  (en  $\text{m}^2$ ). Le rendement est modélisé par :

$$\eta(x) = 1 - e^{-0,2x} \quad \text{pour } x \geq 0$$

Le coût de fabrication (en euros) est  $C(x) = 500x + 200$ .

1. (1 pt) Calculer  $\eta(0)$  et interpréter.

2. (1,5 pt) Calculer  $\eta(5)$  et  $\eta(10)$ . Le rendement peut-il dépasser 1 ? Justifier.

3. (2 pts) Déterminer la surface minimale  $x_0$  pour obtenir un rendement d'au moins 90 %. Résoudre  $\eta(x) \geq 0,9$ .

4. (2 pts) Calculer  $\eta'(x)$ . Étudier son signe et ses variations. En déduire que chaque  $\text{m}^2$  supplémentaire apporte un gain de rendement de plus en plus faible.

5. (2 pts) On définit le *rapport qualité/coût* par  $R(x) = \frac{\eta(x)}{C(x)}$ . Montrer que maximiser  $R(x)$  revient à trouver le meilleur compromis entre rendement et coût. Calculer  $R(5)$  et  $R(15)$ .

---

---

**6. (1,5 pt)** Pour un budget de 4 000 €, quelle surface maximale peut-on installer ? Quel rendement obtient-on ?

---

---