Fonction dérivée

1 Des dérivées à connaître

Définition : fonction dérivable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable pour tout réel a de I.

La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f.
On la note f'. On dit aussi la dérivée de f.

Propriété : les dérivées à connaître

$f(x)$	Domaine de définition de f	$f'(x)$	Domaine de définition de f'
a où $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
ax où $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$	$\mathbb{R}$

Propriété : opérations sur les dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
- La fonction kf est dérivable sur I et $(kf)' = k \times f'$

Exemple : dérivée d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + x - 4$.

L'expression de la dérivée de $4x^3$ est $4 \times 3x^2 = 12x^2$.
L'expression de la dérivée de $5x^2$ est $5 \times 2x = 10x$.
L'expression de la dérivée de x est 1.
L'expression de la dérivée de 4 est 0.

Ainsi, $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$.

2 Variation et extrema d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f' la fonction dérivée de f.

- Si f est (strictement) croissante sur alors f est croissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) > 0$).
- Si f est (strictement) décroissante sur alors f est croissante sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$ (ou $f(x) < 0$).

Démonstration

Soit x un réel de I et soit h un réel non nul tel que $x + h \in I$.

■ Si f est croissante sur I alors :

- si $h > 0$ alors $x + h > x$ et $f(x+h) \geqslant f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$
- si $h < 0$ alors $x + h > x$ et $f(x+h) \leqslant f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$

Dans les deux cas, $f(x+h) - f(x)$ et h sont de même signe donc $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Si h se rapproche de plus en plus près de 0 alors $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$ prend des valeurs positives.

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$.

■ Si f est décroissante sur I la démonstration est analogue.

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est (strictement) positive sur I alors f est (strictement) croissante sur I.
- Si f' est (strictement) négative sur I alors f est (strictement) décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque

Cette dernière propriété est très utile pour étudier les variations d'une fonction.

Exemple : étude des variations d'un polynôme de degré 3

On souhaite étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 7$.

(1) On calcule l'expression de la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

(2) $3 > 0$ donc f' est positive sauf entre ses racines (qui sont -3 et 1).

(3) Ainsi, f' est strictement positive sur $]-\infty\,;\,-3[$ et $]1\,;\,+\infty[$ et strictement négative sur $]-3\,;\,1[$.
En utilisant la précédente propriété, on en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-3[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-3\,;\,1[$.

Ces informations peuvent figurer dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Définitions (rappels)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I.

- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout réel x de I $f(a) \geqslant f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout réel x de I $f(a) \leqslant f(x)$.
- On dit que f admet un **extremum** sur I si elle possède un maximum ou un minimum sur I.

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Si la dérivée f' s'annule et change de signe en un réel a de I alors f admet un extremum en $x = a$.

Exemple : étude des variations d'un polynôme de degré 3

On reprend l'exemple précédent.

La fonction f admet un maximum sur $]-\infty\,;\,1[$ en -3 qui vaut $f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + 7 = 34$.
La fonction f admet un minimum sur $]-3\,;\,+\infty[$ en 1 qui vaut $f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 7 = 2$.

On peut ainsi compléter le précédent tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	34	$\searrow$	2	$\nearrow$	

Fonction dérivée

> Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Exercice n°1 Pour chaque fonction f suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.

$f(x) = 8x$ $\quad$ $f(x) = -\dfrac{1}{2}x$ $\quad$ $f(x) = -x$

Exercice n°2 Pour chaque fonction g suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $g'(x)$ pour tout réel x.

$g(x) = -2x + 9$ $\quad$ $g(x) = 0,2x - 1,1$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{-3}{2}x - 1$

Exercice n°3 Pour chaque fonction h suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $h'(x)$ pour tout réel x.

$h(x) = 6x^2$ $\quad$ $h(x) = -5x^2$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{5}{3}x^2$

Exercice n°4 Pour chaque fonction f suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad$ $f(x) = -5x^2 - x + 9$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 5x$

Exercice n°5 Pour chaque fonction g suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $g'(x)$ pour tout réel x.

$g(x) = x^3$ $\quad$ $g(x) = -2x^3$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + 1$

Exercice n°6 Pour chaque fonction h suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $h'(x)$ pour tout réel x.

$h(x) = x^3 - x^2 + x$ $\quad$ $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x$ $\quad$ $h(x) = -x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Exercice n°7 Pour chaque fonction f suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f'(t)$ pour tout réel t.

$f(t) = -2t^3 + 8t^2 + \sqrt{2}t + 3$ $\quad$ $f(t) = t(t-3)(t+1)$ $\quad$ $f(t) = (2t-4)^2$

> Tangente à une courbe en un point

Exercice n°8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2t^2$.

1. Déterminer l'expression de $f'(t)$ pour tout réel t.
2. Calculer $f'(-1)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

Exercice n°9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 1$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Calculer $f'(2)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

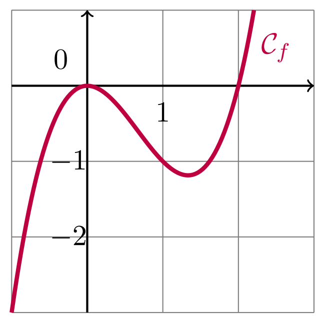
Exercice n°10 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^3 + 9x^2 + 8x + 2$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

Exercice n°11

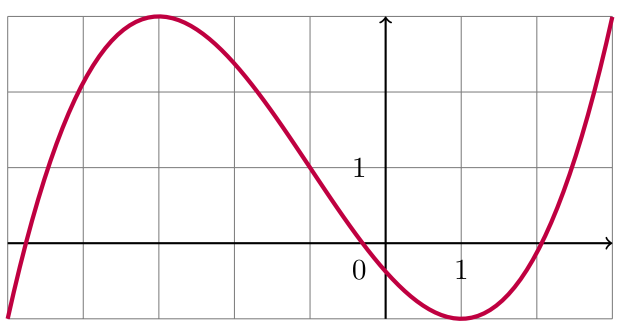
On donne ci-contre un extrait de la courbe représentative de $f : x \mapsto x^3 - 2x^2$ notée $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
2. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.



> Sens de variation et extremum

Exercice n°12 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5\,;\,3]$.



1. Établir le tableau de signes de $f(x)$ sur $[-5\,;\,3]$.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[-5\,;\,3]$.

Exercice n°13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 4$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Établir le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice n°14 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : t \mapsto -3t^2 - 4t + 2$.

1. Déterminer l'expression de $g'(t)$ pour tout réel t.
2. Établir le tableau de variations de t sur son ensemble de définition.
3. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition et en quel réel est-il atteint ?

Exercice n°15 Soit g la fonction définie sur $[-1\,;\,6]$ par $g : x \mapsto 5(x-3)^2 + 1$.

1. Déterminer l'expression de $g'(x)$ pour tout réel x.
2. Établir le tableau de variations de g sur son ensemble de définition.
3. Quel est le minimum de g sur son ensemble de définition et en quel réel est-il atteint ?

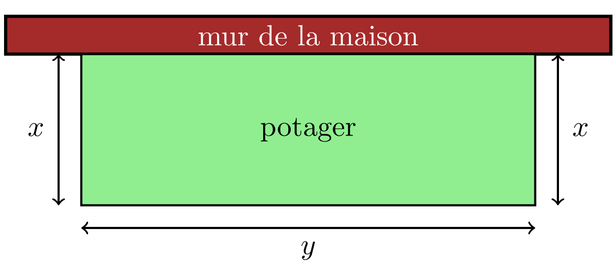
Exercice n°16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3(x+3)(x-5)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Établir le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice n°17 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : t \mapsto -\dfrac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 14t - 1$.

1. Déterminer l'expression de $f'(t)$ pour tout réel t.
2. Montrer que pour tout réel t on a $f'(t) = -2(t-1)(t+7)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice n°18 Jean-Kevin souhaite créer un potager rectangulaire le long du mur de sa maison.



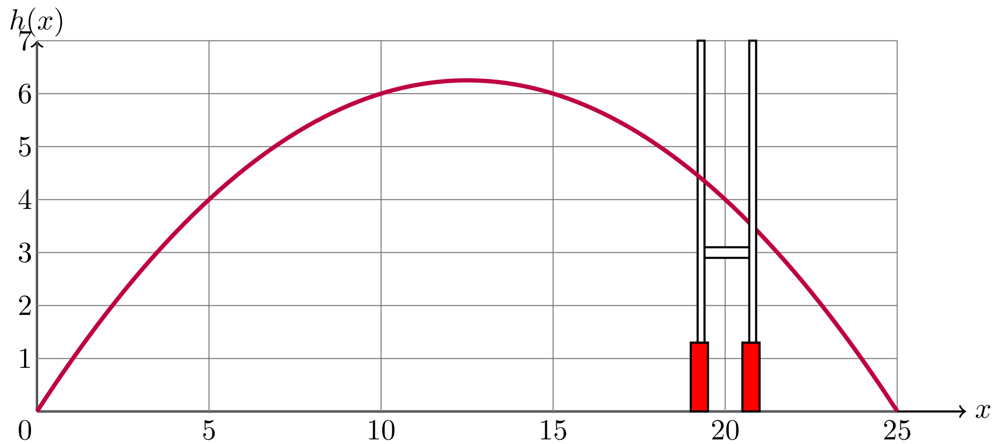
Le potager devra avoir la plus grand surface possible. Pour cela, il dispose de 15 m de grillage pour clôturer les trois côtés (le quatrième étant le mur).
Les nombres x et y sont les dimensions, en mètre, du potager comme indiqué sur la figure ci-dessus qui n'est pas à l'échelle.

1. À quel intervalle appartiennent les nombres x et y ?
2. Montrer que $y = 15 - 2x$.
3. En déduire une expression de l'aire du potager en fonction de x.
4. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,7{,}5]$ par $f : x \mapsto -2x^2 + 15x$.

(a) Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $[0\,;\,7{,}5]$.
(b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,7{,}5]$.
(c) En déduire que la fonction f admet un maximum sur $[0\,;\,7{,}5]$. Donner la valeur de ce maximum et la valeur du réel pour lequel il est atteint.
(d) En déduire les dimensions du potager de Jean-Kevin.

Exercice n°19 Un joueur de rugby se situe à une distance de 20 mètres des poteaux.

Il souhaite que le ballon passe au dessus de la barre située à 3 mètres du sol. La trajectoire du ballon peut être modélisée par la fonction h définie par $h(x) = ax^2 + bx + c$ où x représente la distance (en m) parcourue par le ballon et $h(x)$ la hauteur (en m) du ballon.



1. Quelle semble être la hauteur maximale atteinte par le ballon ? Au bout de combien de mètres parcourus par le ballon cette hauteur maximale semble-t-elle atteinte ?
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,25]$, $h(x) = -0,04x^2 + x$.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,25]$.
3. Dresser le tableau de variations de h sur son intervalle de définition.
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ? Pour quelle valeur de x cette hauteur est-elle atteinte ?
5. On rappelle que les poteaux se situent à 20 m du joueur ayant effectué le tir. Quelle est la hauteur du ballon à cet endroit ?
6. Le joueur a-t-il réussi son tir ?

Exercice n°20

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament. Il peut fabriquer de 5 à 30 kg de ce médicament par semaine.
Le bénéfice réalisé par l'entreprise, c'est à dire la différence entre la recette et le coût de production, est exprimé en euros et modélisé par la fonction B définie sur $[5\,;\,30]$ par

$$\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72$$

1. (a) Déterminer une expression de $\mathrm{B}'(x)$ pour tout réel x dans $[5\,;\,30]$.
   (b) Montrer que pour tout réel x on a $\mathrm{B}'(x) = -(x-2)(x-20)$.
   (c) Dresser le tableau de variations de B sur $[5\,;\,30]$.

2. On considère que la production est entièrement vendue. Déterminer la quantité à produire pour réaliser un bénéfice maximum. Quelle est la valeur de ce bénéfice ?
3. Le service de commercialisation du laboratoire a fixé un objectif de vente entre 15 kg et 24 kg pour la semaine à venir. Quel est le bénéfice minimum envisageable ?

Exercice n°21

Une entreprise produit des pizzas surgelées.
On suppose qu'elle vend toute sa production par lots de 25 pizzas à la grande distribution.
L'entreprise produit entre 10 lots et 100 lots par jour.

Le prix de vente d'un lot est fixé à 78,50€. On estime que le coût total par jour de production est donné par la fonction C définie sur $[10\,;\,100]$ par

$$C(x) = 0,02x^3 - 2,5x^2 + 116x + 880$$

où x désigne le nombre de lots fabriqués.

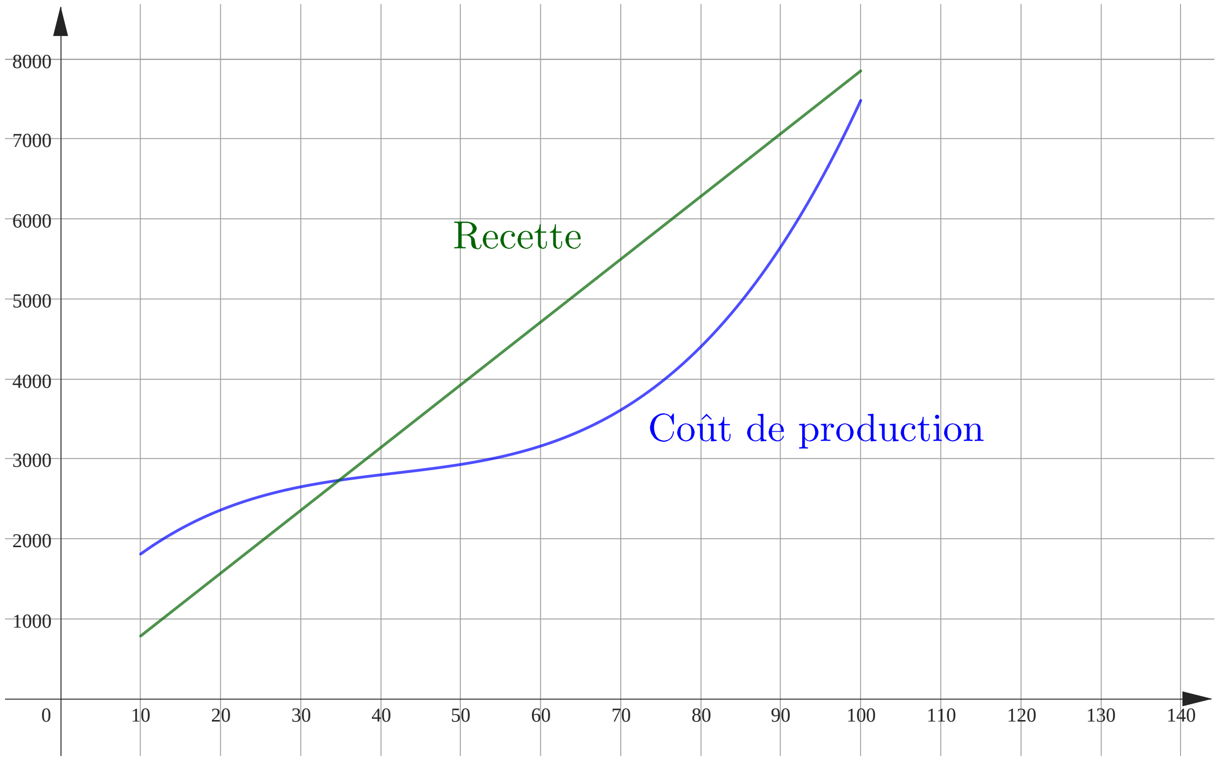
Partie A : Le coût marginal

1. Calculer $C'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$.
2. On sait que le coût marginal $C_m(x)$ peut être assimilé à $C'(x)$. On pose alors $C_m(x) = C'(x)$.
   (a) Calculer $C'_m(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C_m sur $[10\,;\,100]$.
3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction C_m sur $[10\,;\,100]$.

   Il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire tant que le coût marginal est est inférieur au prix de vente. Tracer, sur la représentation graphique ci-dessus, la droite d'équation $y = 78,50$.
   En déduire graphiquement jusqu'à quelle valeur de x il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire.

Partie B : Étude du bénéfice

On pose $R(x) = 78,5x$ la recette, en euros, pour x lots vendus.
Le bénéfice $B(x)$, pour x lots fabriqués et vendus, est la différence entre la recette et le coût de production. On pose ainsi $B(x) = R(x) - C(x)$.
Les courbes représentatives des fonctions C et R sont données sur la page suivante.



1. Par lecture graphique, estimer la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. (a) Déterminer l'expression de $B(x)$ pour tout réel x.
   (b) Calculer $B'(x)$.
   (c) Montrer que pour tout réel x on a $B'(x) = (-0,06x + 0,5)(x - 75)$.
   (d) Dresser le tableau de variations de B sur $[10\,;\,100]$.
   (e) Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice ?