

Fonctions numériques de deux variables réelles Chapitre 10

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 10-1

1. On a $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$ donc $x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0$.
Or, pour tous réels x et y : $\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|xy| \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0$ qui est toujours vrai.
Donc pour tous réels x et y , $\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$.
2. On a pour $(x, y) \neq (0, 0)$:
 $|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x||xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|}{2}$ d'après l'inégalité précédente.
De plus $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{2} = 0$, donc par théorème d'encadrement :
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f((x, y)) = 0 = f((0, 0))$.
D'où f est continue en $(0, 0)$.

Exercice 2. exo 10-2

Etudions la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On a pour $a \neq 0$, $f((at, t^2)) = \frac{a^2 t^4}{t^4(1 + a^2)} = \frac{a^2}{(1 + a^2)}$.

Quand t tend vers 0, (at, t^2) tend vers $(0, 0)$ or, $f((at, t^2))$ ne tend pas vers 0 pour $a \neq 0$.
Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3. exo 10-3

Montrons que la fonction f définie par $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + e^y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

En effet $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + e^y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (somme de fonction polynomiale et composée avec l'exponentielle) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. exo 10-4 Calculons si elles existent les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

f est polynomiale donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\partial_1(f)(x, y) = 2xy^2 + 2x + 4y, \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = 2x^2 y + 2y + 4x.$$

Exercice 5. exo 10-5

Calculons si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

f est polynomiale donc f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 2y^2 + 2$$

Par Schwartz :

$$\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = 4xy + 4$$

$$\text{et } \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 2x^2 + 2$$

Et la hessienne de f :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2y^2 + 2 & 4xy + 4 \\ 4xy + 4 & 2x^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. exo 10-6 Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xe^{x+3y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme, produit et composée de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, $(x, y) \mapsto x^2 - 3xy^2$, $(x, y) \mapsto x + 3y$, $(x, y) \mapsto x$ sont polynomiales donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$x \mapsto e^x$ est C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. exo 10-7

Donnons le développement limité d'ordre 2 de :

$f : (x, y) \mapsto 2x^2e^{x-2y}$ au point $(2, 1)$, ainsi que sa hessienne en ce point.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que produit et composée de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, $(x, y) \mapsto 2x^2$, $(x, y) \mapsto x - 2y$ sont polynomiales donc C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$x \mapsto e^x$ est C^2 sur $\mathbb{R}$.

f admet donc un DL à l'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$.

$$\partial_1(f)(x, y) = 2(2x + x^2)e^{x-2y}, \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = -4x^2e^{x-2y}.$$

Puis :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 2(2 + 4x + x^2)e^{x-2y}$$

Par Schwartz :

$$\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = -4x(2 + x)e^{x-2y}$$

$$\text{et } \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 8x^2e^{x-2y}$$

La hessienne au point $(2, 1)$:

$$\nabla^2(f)(2, 1) = \begin{pmatrix} 28 & -32 \\ -32 & 32 \end{pmatrix}.$$

Et $f(2, 1) = 8$.

Le DL à l'ordre 2 de f au point $(2, 1)$ est donné alors par :

$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $f(2 + h, 1 + k) = 8 + 16h - 16k + \frac{1}{2}(28h^2 - 64hk + 32k^2) + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$ avec ϵ continue en 0 et $\epsilon((0, 0)) = 0$.

Exercice 8. exo 10-8

On admet que l'ensemble $U = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que l'ensemble $V = \{(x, y) / x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction définie par :

$$f : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2y^2 - 4x - 3y + 4xy + 3.$$

Montrer que f admet un maximum et un minimum sur U et préciser leurs valeurs.

U est un fermé, borné de $\mathbb{R}^2$ (car $U \subset D((0, 0), 1)$) et f est continue (même C^2) sur U car polynomiale. Donc f admet un max et un min sur U .

On peut décomposer U de la façon suivante :

$$U = V \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3 \text{ avec } F_1 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

$$F_2 = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, x = 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x + y = 1\}$$

On va donc étudier les extrema de f sur chacun de ces domaines.

• sur F_1 :

f s'écrit : $g(x) = f((x, 0)) = 3x^2 - 4x + 3$ avec $0 \leq x \leq 1$.

$$g'(x) = 6x - 4, g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2/3$$

g' s'annule en changeant de signes en $2/3$ donc g admet un min qui vaut $5/3$.

$$g(0) = 3, g(1) = 2.$$

Donc f admet un max sur F_1 qui vaut $f((0, 0)) = 3$ et un min qui vaut $f((2/3, 0)) = 5/3$.

• sur F_2 :

f s'écrit : $h(y) = f((0, y)) = 2y^2 - 3y + 3$ avec $0 \leq y \leq 1$.

$$h'(y) = 4y - 3, h'(y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3/4$$

h' s'annule en changeant de signes en $3/4$ donc h admet un min qui vaut $15/8$.

$$h(0) = 3, h(1) = 2.$$

Donc f admet un max sur F_2 qui vaut $f((0, 0)) = 3$ et un min qui vaut $f((0, 3/4)) = 15/8 > 5/3$.

• sur F_3 :

f s'écrit : $k(x) = f((x, 1 - x)) = x^2 - x + 2$ avec $0 \leq x \leq 1$.

$$k'(x) = 2x - 1, k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$$

k' s'annule en changeant de signes en $1/2$ donc k admet un min qui vaut $7/4$.

$$k(0) = 2, k(1) = 2.$$

Donc f admet un max sur F_3 qui vaut $f((0, 1)) = 2 = f((1, 0))$ et un min qui vaut $f((1/2, 1/2)) = 7/4 > 5/3$.

Bilan : le max sur $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ est $3 = f((0, 0))$ et le min est $5/3 = f((2/3, 0))$.

• sur V : Il nous faut voir sur l'ouvert V donc chercher si f admet des points critiques.

V est un ouvert et $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale.

Donc si f a un extremum, il ne peut-être que parmi les points critiques de f donc solution de $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 4y - 4 \\ 4x + 4y - 3 \end{pmatrix} = 0$.

$$\text{On résout : } \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2L_1 - L_2, 4L_1 - 3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ -4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/2, y = -1/4$$

On a donc un unique point critique : $(1/2, -1/4)$.

Si f admet un extremum sur l'ouvert V , il est nécessairement en $(1/2, -1/4)$. Or, $f((1/2, -1/4)) = 13/8 < 3$ donc ce n'est pas le maximum de f et

$13/8 < 5/3$ donc c'est le minimum que l'on cherchait pour f .

Conclusion :

f a un max global sur U atteint en $(0, 0)$ et vaut 3 et f admet un min global sur U atteint en $(1/2, -1/4)$ qui vaut $13/8$.

Exercice 9. exo 10-9

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. En quels points f peut-elle présenter un extremum ?

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert et $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale.

Donc si f a un extremum, il ne peut-être que parmi les points critiques de f donc solution de $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2x + 4y \\ 2yx^2 + 2y + 4x \end{pmatrix} = 0$ (d'après l'exo 10-4).

$$\text{On résout : } \begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ 2yx^2 + 2y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ 2(y - x)(xy + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ xy = -1 \text{ ou } x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ xy = -1 \text{ ou } x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ xy = -1 \text{ ou } x = y \end{cases}$$

1 ou $x = 1, y = -1$ ou $x = y = 0$

On a donc 3 points critiques : $(1, -1), (-1, 1), (0, 0)$, points en lesquels f pourrait avoir des extrema locaux.

Exercice 10. exo 10-10

Soit h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 10$. En quels points h peut-elle présenter des extremums (et dire si ce sont des extrema locaux) ?

$h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale.

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert. Donc si h a un extremum, il ne peut-être que parmi les points critiques de h donc solution de $\nabla(h)(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 9y \\ 3y^2 - 9x \end{pmatrix} = 0$.

$$\text{On résout : } \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y \\ y^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, x^4 = 27x \\ y^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, x(x^3 - 27) = 0 \\ y^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \text{ ou } x = 3, y = 3 \end{cases}$$

On a donc 2 points critiques : $(3, 3), (0, 0)$, points en lesquels h pourrait avoir des extrema locaux.

On calcule les dérivées partielles de h d'ordre 2 :

$$\partial_{1,1}^2(h)(x, y) = 6x$$

Par Schwartz :

$$\partial_{1,2}^2(h)(x, y) = \partial_{2,1}^2(h)(x, y) = -9$$

$$\text{et } \partial_{2,2}^2(h)(x, y) = 6y$$

La hessienne au point $(0, 0)$:

$A = \nabla^2(h)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$. Matrice symétrique donc diagonalisable, ses valeurs propres λ sont solutions de :

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9 \text{ ou } -9$. Les valeurs propres sont de signes contraires donc h a un point selle en $(0, 0)$ donc pas d'extremum.

La hessienne au point (3,3) :

$B = \nabla^2(h)(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$. Matrice symétrique donc diagonalisable, ses valeurs propres λ sont solutions de :

$$\det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (18 - \lambda)^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 36\lambda + 243 = 0.$$

On voit que le produit des racines vaut $243 > 0$ et leur somme est $36 > 0$ donc on a deux valeurs propres strictement positives. Donc h a un minimum local en (3,3) qui vaut $h((3,3)) = -17$.

NB : $h((0,y)) = y^3 + 10 \xrightarrow{y \rightarrow +(-)\infty} +(-)\infty$ donc h n'a pas de minimum global.

Exercice 11. exo 10-11

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. f a-t-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert et $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale.

On a vu à l'exo 10-9 que f avait 3 points critiques : (1, -1), (-1, 1), (0, 0).

On calcule les dérivées partielles de f d'ordre 2 :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x,y) = 2y^2 + 2$$

Par Schwartz :

$$\partial_{1,2}^2(f)(x,y) = \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = 4xy + 4$$

$$\text{et } \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = 2x^2 + 2$$

La hessienne au point (0,0) :

$A = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Matrice symétrique donc diagonalisable, ses valeurs propres λ sont solutions de :

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ Le produit des racines vaut -12 il est négatif donc les valeurs propres sont de signes contraires donc f a un point selle en (0,0) donc pas d'extremum.

La hessienne au point (1, -1) :

$B = \nabla^2(f)(1,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Matrice diagonale, ses valeurs propres sont égales à $4 > 0$ Donc f admet un minimum

local en (1, -1) qui vaut $f((1,-1)) = -1$

La hessienne au point (-1, 1) :

On trouve la même matrice que précédemment.

$B = \nabla^2(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Matrice diagonale, ses valeurs propres sont égales à $4 > 0$ Donc f admet un minimum

local en (-1, 1) qui vaut $f((-1,1)) = -1$

Bilan : f admet deux minimums locaux en (-1, 1) et en (1, -1) qui valent -1 .

Exercice 12. exo 10-12

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. f a-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? D'après l'exercice précédent, si f admet un minimum global ce ne peut-être qu'aux points de coordonnées (-1, 1) et (1, -1).

Et on a $f((-1,1)) = -1 = f((1,-1))$

De plus on remarque que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) + 1 = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy + 1 = x^2y^2 + 2xy + 1 + x^2 + y^2 + 2xy = (xy+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$

Par conséquent $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) \geq -1$, ce qui prouve bien que f a un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ qui vaut -1 atteint aux points de coordonnées (-1, 1) et (1, -1).

Exercice 13. exo 10-13

Soit g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$. g a-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?

On a $g(y) = f((1,y)) = y^3 - 3y^2 + 2y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ et de même

$g(y) = f((1,y)) = y^3 - 3y^2 + 2y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$.

Donc si f avait un maximum global M sur $\mathbb{R}^2$ alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) \leq M$ donc en particulier on aurait $g(y) = f((1,y)) \leq M$ ce qui est absurde car $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$.

De même si f avait un minimum global m sur $\mathbb{R}^2$ alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) \geq m$ donc en particulier on aurait $g(y) = f((1, y)) \geq m$ ce qui est absurde car $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$.