

Mathématiques – Centrale/Mines – DS₃

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Problème : Polynômes de Hermite (Centrale PSI 2024)

Notations

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.
- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.
- Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle $\text{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N}) = \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}, g = \sum_{k=0}^N a_k P_k \right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendante des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

Partie I : Intégrale de Wallis et Intégrale de Gauss

I. A - Intégrale de Wallis

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

Q1. Étudier la monotonie de la suite (W_n) .

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Q4. En déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Réponse

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos t - 1) dt$$

. L'intégrande est une fonction négative, donc $W_{n+1} - W_n \leq 0$. Ainsi,

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Q2. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= (\cos(t))^{n+1} & u'(t) &= -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \\ v(t) &= \sin(t) & v'(t) &= \cos(t). \end{aligned}$$

Il vient :

$$W_{n+2} = \underbrace{\left[\sin(t) \cos(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\sin(t))^2 \cos^n(t) dt$$

Or, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$. Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

Donc,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.

Par la question précédente,

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n.$$

Donc, la suite (u_n) étant constante.

$$\text{Or, } W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 1.$$

$$\text{Donc, } u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Q4. Dans W_n , l'intégrande est continue positive et n'est pas la fonction nulle, donc, par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

De plus, par **Q1**, la suite (W_n) est décroissante.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Or,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc,

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n.}$$

D'où, par **Q3**,

$$(n+1)W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}.$$

Comme $W_n \geq 0$,

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

I. B - Intégrale de Gauss

On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Q5. Justifier l'existence de I .

Q6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

Q7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin u$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Q8. En déduire la valeur de I puis de J .

Réponse

Q5. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $e^{-x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi,

I converge absolument, donc converge.

Q6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

Comme f_n est nulle sur $[\sqrt{n}, +\infty[$, on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

On applique le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x \leq \sqrt{n}$ et :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right).$$

Or, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $-\frac{x^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc,

$$n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \times \frac{x^2}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -x^2.$$

Donc, par composition des limites,

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-x^2} = f(x).$$

- La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : $x \in [0, \sqrt{n}]$.

Par concavité de $\ln$, on a, pour tout $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.

Donc, par croissance de l'exponentielle :

$$|f_n(x)| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-n \times \frac{x^2}{n}\right) \leq e^{-x^2}.$$

Cas 2 : $x \geq \sqrt{n}$. On a : $|f_n(x)| = 0 \leq e^{-x^2}$.

Donc, en notant, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$|f_n(x)| \leq e^{-x^2}.$$

Dans **Q5**, on a vu que $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, par convergence dominée,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Q7. On applique le changement de variable proposé :

$$\begin{cases} x = \sqrt{n} \sin(u) \\ dx = \sqrt{n} \cos(u) du \end{cases}$$

Ce changement de variable est licite car $\sin$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n \sin^2(u)}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^{2n+1} du = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Q8. Par **Q4**,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par unicité de la limite

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme l'intégrande est paire,

$$J = 2I = \sqrt{\pi}.$$

Partie II : Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{II.1})$$

On définit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Q9. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q10. Montrer que G est solution de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

On admet que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}.$$

Q11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n}.$$

Réponse

Q9. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, on note $f(x, t) = \cos(x \sin(t))$.

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc intégrable sur $[0, \pi]$. On en déduit que

G est définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t))$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc intégrable sur $[0, \pi]$.
 ► Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = |-\sin^2(t) \cos(x \sin(t))| \leq 1.$$

Or, la fonction $x \mapsto 1$ est positive et continue sur le segment $[0, \pi]$, donc intégrable sur $[0, \pi]$.

Ainsi, par théorème de dérivabilité sous le signe $\int$,

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(t) \sin(x \sin(t)) \, dt$$

$$G''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \, dt$$

Et donc

$$\begin{aligned} xG''(x) + G'(x) + xG(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos(x \sin(t))) \, dt \\ &= \int_0^\pi (x(1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t))) \, dt \\ &= \int_0^\pi x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} [\cos(t) \sin(x \sin(t))]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc,

G est solution de l'équation différentielle (II.1).

Q11. D'après le résultat admis appliqué avec $\theta = x \sin(t)$, on a :

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} \, dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$, on a :

$$g_n(t) = (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!}.$$

- Les fonctions g_n sont continue sur le segment $[0, \pi]$, donc intégrable sur ce segment.
 ► Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!}$ converge et sa somme est $\cos(x \sin(t))$.
 ► La fonction $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur $[0, \pi]$.
 ► Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi |f_n(t)| \, dt = \int_0^\pi \left| (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} \right| \, dt \leq \int_0^\pi \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \, dt \leq \pi \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, par croissances comparées, $\frac{|x|^{2n}}{(2n)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$).

Donc, par théorèmes de comparaison (les séries sont à termes positifs), $\sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \int_0^\pi |f_n(t)| \, dt$ convergent.

Ainsi, par théorème d'interversion limite intégrale,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n}.$$

Partie III : Étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

III. A - Les polynômes d'Hermite.

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x),$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de w .

En particulier : $H_0(x) = 1$.

Q12. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

Q13. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

Q14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.

Q15. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n .

Réponse

Q12. On trouve :

$$H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Q13. En dérivant la définition de H_n , il vient :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

Q14. On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « H_n est de degré n et de même parité que n ».

Initialisation. On a $H_0(x) = 1$. Donc, H_0 est de degré 0 et est pair (0 est pair).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$. On montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Comme $\deg(H_n) = n$, on sait que $\deg(H'_n) \leq n-1$ et $2\deg(XH_n) = n+1 \neq n-1$.

Donc, par somme de deux polynômes de degré différent, le degré de H_{n+1} est $n+1$.

De plus, comme H_n a la même parité que n , on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Donc, en dérivant,

$$-H'_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \iff H'_n(-x) = (-1)^{n+1} H'_n(x).$$

D'où,

$$H_{n+1}(-x) = -2xH'_n(-x) - H'_n(-x) = (-1)^{n+1} \times 2xH'_n(x) - (-1)^{n+1} H'_n(x) = (-1)^{n+1} (2xH'_n(x) - H'_n(x)) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x).$$

Donc, H_{n+1} est de la parité de $(-1)^{n+1}$.

Ainsi, par le principe de récurrence,

$$H_n \text{ est de degré } n \text{ et de même parité que } n.$$

Q15. Comme H_n est de degré n , on a : $H_n = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'où,

$$H_{n+1} = 2a_n X^{n+1} + \underbrace{2XQ - H'_n}_{\text{de degré } < n+1}.$$

Donc, le coefficient dominant de H_{n+1} est $2a_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n$. On reconnaît une suite géométrique de raison 2 et, comme $H_0(x) = 1$, de premier terme $a_0 = 1$.

Ainsi,

le coefficient dominant de H_n est 2^n .

III.B - Un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-x^2} dx$ converge.

Q16. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Q17. Montrer que si $(f, g) \in E^2$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ converge absolument.

Q18. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

Q19. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f, g) \in E^2$ associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Réponse

Q16. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ et, en développant, $(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$.

Donc,

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Q17. On suppose que $(f, g) \in E^2$. On a :

$$0 \leq \left| f(x)g(x)e^{-x^2} \right| \leq \frac{1}{2}(f(x))^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2}(g(x))^2 e^{-x^2}.$$

Comme f et g sont dans E , les fonctions $x \mapsto (f(x))^2 e^{-x^2}$ et $x \mapsto (g(x))^2 e^{-x^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Par somme, $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x))^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2}(g(x))^2 e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc, par théorème de comparaison, $x \mapsto f(x)g(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ converge absolument.

Q18. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$).

On a $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, appartient à E .

Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\lambda f(x) + g(x))^2 e^{-x^2} = \lambda^2 (f(x))^2 e^{-x^2} + 2\lambda f(x)g(x)e^{-x^2} + (g(x))^2 e^{-x^2}.$$

On sait que f et g appartiennent à E , donc, par **Q17**, par somme de fonctions intégrables, $x \mapsto (\lambda f(x) + g(x))^2 e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, $\lambda.f + g \in E$.

Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ainsi,

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

La fonction $x \mapsto (P(x))^2 e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, par croissances comparées, $(P(x))^2 e^{-x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $\pm\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $x \mapsto (P(x))^2 e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $P \in E$ et

$\mathbb{R}[X] \subset E$.

Q19. Soit $(f, g, h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

► Par **Q17**, $\langle f, g \rangle$ est bien défini.

► $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)e^{-x^2} dx = \langle g, f \rangle$. Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

► Par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales sont convergentes par **Q18**),

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + g, h \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))h(x)e^{-x^2} dx \\ &= \lambda \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(x)e^{-x^2} dx \\ &= \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire.

► Par positivité de l'intégrale, $\langle f, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2} dx \geq 0$.

► Soit $f \in E$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$.

La fonction $x \mapsto (f(x))^2 e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 e^{-x^2} = 0$. Comme $e^{-x^2} \neq 0$, on en déduit que f est la fonction nulle.

Ainsi,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

III. C - Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

Q20. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle$$

Q21. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\langle P, H_n \rangle = 0$.

Q22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$.

Q24. En déduire la valeur de $\|H_n\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)(-1)^{n-1} e^{x^2} w^{(n-1)}(x) e^{-x^2} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) w^{(n-1)}(x) dx.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(x) &= P(x) & u'(x) &= P'(x) \\ v(x) &= w^{(n-1)}(x) & v'(x) &= w^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Sous réserve de pouvoir intégrer par parties :

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\left[P(x) w^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) w^{(n)}(x) dx \right).$$

On a :

$$P(x) w^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2}$$

Or, $P(x) H_{n-1}(x)$ est polynomial en x , donc, par croissances comparées,

$$P(x) w^{(n-1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

De plus, par **Q18**, $P' \in E$ et $H_n \in E$, donc l'intégrale $\langle P', H_{n-1} \rangle$ converge.

On peut donc intégrer par parties et

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx.$$

Ainsi,

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle.$$

Q21. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En appliquant n fois la question précédente, :

$$\langle P, H_n \rangle = \langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P^{(2)}, H_{n-2} \rangle = \dots = \langle P^{(n)}, H_0 \rangle$$

Or, P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc, $P^{(n)} = 0$.

Donc,

$$\langle P, H_n \rangle = \langle 0, H_0 \rangle = 0.$$

Q22. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes échelonnée en degrés, donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'autre part, par **Q21** et **Q14**, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, H_k est orthogonal à $H_0, \dots, H_{k-1}$.

Donc, les H_k sont orthogonaux deux à deux.

Ainsi,

$$\text{la famille } (H_0, \dots, H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].$$

Q23. Comme dans **Q21**, on a :

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \langle H'_n, H_{n-1} \rangle = \langle H_n^{(2)}, H_{n-2} \rangle = \dots = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle.$$

Donc,

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle.$$

Q24. Par **Q14** et **Q15**, H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n , donc, $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$.

Donc,

$$\|H_n\|^2 = \langle n! 2^n, 1 \rangle = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} J = 2^n n!.$$

Ainsi,

$$\|H_n\| = 2^{n/2} \sqrt{n!}.$$

III. D - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note u, v, w les applications définies de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$u(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'$$

Q25. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

Par la suite, on notera u_n l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

Q26. Établir : $v \circ w = u - \text{Id}$ et $w \circ v = u + \text{Id}$.

Q27. En déduire : $u \circ v - v \circ u = 2v$.

Q28. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.

Q29. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, H_k$ est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q31. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$\langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q32. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $\langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle$.

Q33. Pour les 5/2. Justifier, d'une deuxième manière, que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n .

Q34. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n .

Réponse

Q25. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$. Par linéarité de la dérivation,

$$u(\lambda.P + Q) = -(\lambda.P + Q)'' + 2X(\lambda.P + Q)' + \lambda.P + Q = \lambda.(-P'' + 2XP' + P) - Q'' + 2XQ' + Q = \lambda.u(P) + u(Q).$$

Donc, comme $u(P) \in \mathbb{R}[X]$,

u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On sait que $\deg(P) \leq n$, donc $\deg(XP') = 1 + \deg(P') \leq 1 + n - 1 \leq n$ et $\deg(P'') \leq n - 2 \leq n$.

Donc, par somme de polynômes de degré au plus n , $\deg(u(P)) \leq n$.

Donc, $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi,

$\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

Q26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$v \circ w(P) = v(w(P)) = v(P') = 2XP' - P'' = -P'' + 2XP' + P - P = (u - \text{Id})(P).$$

De plus,

$$w \circ v(P) = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P'' = (P + 2XP' - P'') + P = (u + \text{Id})(P).$$

Ceci est vrai pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, donc,

$v \circ w = u - \text{Id}$ et $w \circ v = u + \text{Id}$.

Q27. D'après la question précédente, on a $u = \text{Id} + v \circ w = w \circ v - \text{Id}$. On a donc

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (\text{Id} + v \circ w) \circ v - v \circ (w \circ v - \text{Id}) \\ &= v + v \circ w \circ v - v \circ w \circ v + v \\ &= 2v \end{aligned}$$

Donc,

$$u \circ v - v \circ u = 2v.$$

Q28. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

On suppose que $u(P) = \lambda P$.

Par **Q27**,

$$u(v(P)) = 2v(P) + v(u(P)) = 2v(P) + v(\lambda P) = (2 + \lambda)v(P)$$

Donc,

$$u(v(P)) = (2 + \lambda)v(P)$$

Q29. On raisonne par récurrence sur k . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}_k$: « H_k est un vecteur propre de u . »

Initialisation.

On sait que $H_0 = 1$ et $u(H_0) = u(1) = 1$.

Donc, H_0 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{Q}_k$ et on montre $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k . On a donc $u(H_k) = \lambda_k P_k$.

Par **Q27**, $u(v(H_k)) = (\lambda + 2)v(H_k)$.

Or, par **Q13**, $v(H_k) = 2XH_k - H'_k = H_{k+1}$.

Donc $u(H_{k+1}) = (\lambda_k + 2)H_{k+1}$.

Comme H_{k+1} est non nul, il s'agit d'un vecteur propre pour u associé à la valeur propre $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$.

Ce qui achève la récurrence.

Dans la récurrence, on a aussi montré que $\lambda_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{k+1} = 2 + \lambda_k$. En reconnaissant une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, on a :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \lambda_k = 2k + 1.$$

Q30. D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $u(H_k) = \lambda_k H_k$.

Or, H_k est de degré $k \geq n$, donc $H_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc, $u_n(H_k) = \lambda_k H_k$.

Donc, l'endomorphisme u_n possède $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes.

Par théorème,

$$u_n \text{ est bien diagonalisable sur } \mathbb{R}.$$

Q31. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$. Notons que par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle -P'' + 2XP', Q \rangle + \langle P, Q \rangle.$$

Montrons que :

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \langle P', Q' \rangle.$$

On a :

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((-P''(x) + 2xP'(x))e^{-x^2} \right) Q(x) dx.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(x) &= -P'(x)e^{-x^2} & u'(x) &= (-P''(x) + 2xP'(x))e^{-x^2} \\ v(x) &= Q(x) & v'(x) &= Q'(x). \end{aligned}$$

Par croissances comparées (P' et Q sont polynomiales), $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. De plus, comme le produit scalaire est bien défini, les intégrales sont convergentes.

On peut intégrer par parties :

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2} Q'(x) dx = \langle P', Q' \rangle.$$

Ainsi,

$$\langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle.$$

Q32. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P', Q' \rangle + \langle P, Q \rangle.$$

En échangeant les rôles de P et Q , on a :

$$\langle u(Q), P \rangle = \langle Q', P' \rangle + \langle Q, P \rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire :

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle.$$

Par définition de u_n , on a :

$$\langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle.$$

Q33. C'est la conclusion du théorème spectral appliqué à u_n .

Q34. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ (**Q22**) constituée de vecteurs propres pour u_n (**Q29**).

Pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n , il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme calculée **Q24**.

Partie IV : Une famille totale

Dans cette partie, nous conservons les notations de la partie III. L'espace E muni de son produit scalaire et la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ précédemment construite.

Nous allons montrer que

$$(\text{Vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp = \{0\}.$$

On dit dans ce cas là que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans l'espace préhilbertien E ou encore que c'est une base hilbertienne de E .

Q35. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, montrer que $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit ainsi

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}e^{-t^2} dt$$

$\mathcal{F}$ est une application linéaire sur E , appelée la transformation de Fourier de f sur l'espace préhilbertien E . Nous admettons pour la suite que $\mathcal{F}$ est injective sur E .

Q36. Montrer que, pour tout entier naturel p , la fonction $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx$. Déterminer la valeur de M_p .

Q37. Soit $f \in E$. Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x)e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} dx$$

Q38. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2} x^n dx \right) \xi^n.$$

Dans la suite de la partie, on suppose que $f \in (\text{Vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp$. Le but est de montrer que f est la fonction nulle.

Q39. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-x^2} dx = 0$.

Q40. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est la fonction nulle.

Q41. Conclure.

Réponse

Q35. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}| = |f(x)|e^{-x^2}.$$

On sait que $f \in E$. De plus, $1 \in \mathbb{R}[X] \subset E$.

Donc, par **Q17**, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2} dx = \langle f, 1 \rangle$ converge absolument, donc,

la fonction $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q36. Soit $p \in \mathbb{N}$.

La fonction $x \mapsto x^{2p}e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, par croissances comparées, $x^{2p}e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $x \rightarrow \pm\infty$.

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $\pm\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison,

$x \mapsto x^{2p}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus, par intégrations par parties successives, on a :

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1} \cdot 2xe^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-x^{2p-1}e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (2p-1)x^{2p-2}e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2p-1}{2} M_{p-1} \\ &= \dots \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2^p} J \\ &= \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2 \times 1}{2^p(2p)(2p-2)\dots 2} J. \end{aligned}$$

Ainsi, par **Q8**,

$$M_p = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

Q37. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

D'où,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} \right) e^{-x^2} dx.$$

Donc, en développant,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} dx$$

Q38. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On applique le théorème d'interversion série intégrale.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note : $f_n(x) = f(x) e^{-x^2} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n$.

- les f_n sont continues.

De plus, $f \in E$ et, la fonction polynomiale $x \mapsto \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n$ appartient à E (Q18).

Donc, par Q17, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est égale à $x \mapsto f(x)e^{-x^2}e^{-ix\xi}$

- $x \mapsto f(x)e^{-x^2}e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$

- On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| e^{-x^2} \frac{|\xi|^n |x|^n}{n!} dx = \frac{|\xi|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |x|^n e^{-x^2} dx = \langle |f|, x \mapsto x^n \rangle \frac{|\xi|^n}{n!}.$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \|f\| \underbrace{\sqrt{\frac{M_n}{\sqrt{\pi}} \frac{|\xi|^n}{n!}}}_{=u_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|\xi|}{n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\xi|}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 < 1.$$

Par le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge absolument. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Q39. On sait que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, X^n est combinaison linéaire de $H_0, \dots, H_n$.

Comme f est orthogonal à tous les H_k , f est orthogonal à X^n .

Donc,

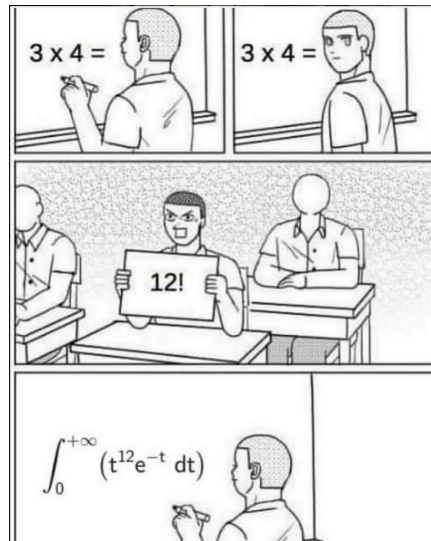
$$\langle X^n, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx = 0$$

Q40. Par Q38,

$$\text{pour tout } \xi \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx \right) \xi^n = 0.$$

Q41. On a admis que $\mathcal{F}$ était injective sur E . Donc, $\text{Ker}(\mathcal{F}) = \{0\}$. Par la question précédente, $f \in \text{Ker}(\mathcal{F})$. Donc,

f est nulle.



– Fin du sujet –

