

Correction Devoir surveillé n°3 type ECRICOME

Exercice 1. d'après Ecricome 2008

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Comme $M(a, b) = aI + bA$ on a donc $E = \text{Vect}(I, A)$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. La famille (I, A) est libre car A et I sont deux matrices non proportionnelles, et elle est génératrice.

Conclusion : (I, A) est une base de E et $\dim(E) = 2$

3. On vérifie en cherchant en même temps les sous-espaces propres associés.

On cherche donc X non nul, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, tel que : $(A - 2I)X = 0$.

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2z \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -z \end{cases}$$

Les solutions ne sont pas toutes nulles donc 2 est valeur propre associé au sous espace propre

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est formée d'un seul vecteur non nul, est donc libre. Donc c'est une base de E_2

et $\dim(E_2) = 1$.

On cherche X non nul, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, tel que : $(A - I)X = 0$.

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 2z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, z \text{ réels.}$$

On a trouvé un vecteur non nul X , solution.

Donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ sont deux vecteurs non proportionnels donc forment une famille libre. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de E_1 .

$\dim(E_1) = 2$.

4. La famille constituée des bases des sous-espaces propres : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme elle est constituée de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, on en déduit que cette famille de vecteurs propres est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Il n'y a donc pas d'autres valeurs propres et A est donc diagonalisable.

5. Pour avoir 2 en première colonne de D , il faut placer un vecteur propre associé à 2 en première position.

Et on a bien 1 sur la diagonale de P , avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est une base de E_2 .

La concaténation des bases des sous espaces propres forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres et d'après la formule de changement de base on a

$D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} par réduite de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 + L_2 \\ -L_2 \\ L_3 + L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 + 4L_3 \\ -L_3}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 + 4L_3 \\ -L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(et on pense bien à vérifier que $P P^{-1} = I$)

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6. On a $M(a, b) = aI + bA$ alors $D(a, b) = P^{-1}(aI + bA)P = aI + bD$ est bien diagonale.

7. Comme P et P^{-1} sont inversibles, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ l'est.

La diagonale de $D(a, b)$ est $(a + 2b, a + b, a + b)$.

Donc $D(a, b)$ est inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

$M(a, b)$ inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$

8. On a

$$M(a, b)^2 = I \iff [PD(a, b)P^{-1}]^2 = I \iff PD(a, b)P^{-1}PD(a, b)P^{-1} = I \iff PD(a, b)^2P^{-1} = I \iff D(a, b)^2 = P^{-1}IP = I.$$

Conclusion : $M(a, b)^2 = I \iff D(a, b)^2 = I.$

$$\text{Or } D(a, b)^2 = \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} \text{ donc } D(a, b)^2 = I \iff a+2b = \pm 1 \text{ et } a+b = \pm 1$$

Ce qui donne quatre systèmes :

$$(1) \begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \iff L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=2 \\ a=-3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Conclusion : Les 4 matrices sont donc $M(1, 0)$, $M(-3, 2)$, $M(3, -2)$ et $M(-1, 0)$.

Exercice 2.

On considère la fonction suivante : pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x+p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$ (famille de fonctions de la variable réelle x).

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

(a) On a $h_p(x) = x - f_p(x) = x - 1 - \ln(x+p)$.

h_p est continue et dérivable sur $] -p, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions usuelles continues et dérivables sur $] -p, +\infty[$.

$h'_p(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p}$ et comme $p \geq 1$, $h'_p > 0$ sur $]0, +\infty[$. Donc h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

En $+\infty$: $h_p(x) = x - 1 - \ln(x+p) = x - 1 - \ln(x(1+p/x)) = x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+p/x)}{x}\right) \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées et par produit des limites)

$h_p(0) = -1 - \ln(p) \leq 0$ car $p \in \mathbb{N}^*$.

Donc h_p est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, h_p est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]h_p(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x)[=]-1 - \ln(p), +\infty[$.

Et comme 0 appartient à $] -1 - \ln(p), +\infty[$ (car $h_p(0) \leq 0$), l'équation

$h_p(x) = 0$ a une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.

Comme $h_p(x) = 0 \Leftrightarrow f_p(x) = x$, l'équation $f_p(x) = x$ admet donc une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.

(b) On a $f_{p+1}(x) = 1 + \ln(x+p+1)$ donc $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) = \alpha_{p+1}$, ainsi $\alpha_{p+1} - 1 = \ln(\alpha_{p+1} + p + 1)$.

D'où : $h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) = \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p)$.

Et comme $\alpha_{p+1} + p + 1 > \alpha_{p+1} + p$ alors par stricte croissance de la fonction logarithme,

$\ln(\alpha_{p+1} + p + 1) > \ln(\alpha_{p+1} + p)$ et donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0$.

On a donc $h_p(\alpha_{p+1}) > 0 = h_p(\alpha_p)$ et comme la fonction h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que α_p et α_{p+1} en sont éléments, on a : $\alpha_{p+1} > \alpha_p$.

Par conséquent, la suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Plusieurs méthodes :

Première méthode :

On a $\alpha_p = f_p(\alpha_p) = 1 + \ln(p + \alpha_p)$, or, $\ln(p + \alpha_p) \geq \ln(p)$ car $\alpha_p > 0$ et la fonction $\ln$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.

Deuxième méthode :

On a montré d'après la première question que $\alpha_p > 0$.

De plus, f_p est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f'_p(x) = \frac{1}{x+p} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De $\alpha_p > 0$ on en déduit par stricte croissance de f_p que $f_p(\alpha_p) > f_p(0)$.

Or $f_p(\alpha_p) = \alpha_p$ et $f_p(0) = 1 + \ln p$, par conséquent :

$\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.

Troisième méthode :

On compare les images par h_p :

$h_p(\alpha_p) = 0$ et $h_p(1 + \ln(p)) = 1 + \ln(p) - 1 - \ln(p + 1 + \ln(p)) = \ln(p) - \ln(p + 1 + \ln(p))$

et comme $p + 1 + \ln(p) > p$ alors $\ln(p) < \ln(p + 1 + \ln(p))$ et $h_p(1 + \ln(p)) < 0 = h_p(\alpha_p)$.

Comme h_p strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que α_p et α_{p+1} en sont éléments, on a :

$\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.

Enfin, par théorème de minoration, comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln p = +\infty$, on en déduit la limite de la suite :

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = +\infty$.

2. Etude de la fonction f_1 .

(a) On a $f_1(x) = 1 + \ln(1+x)$.
 $\forall x > -1, 1+x > 0$. Donc f_1 est définie, continue, dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables sur $] -1, +\infty[$.

(b) Par le DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0 on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
 Donc le DL à l'ordre 2 en 0 de f_1 est : $f_1(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Le DL à l'ordre 1 en 0 de f_1 est d'après le cours de première année :

$$f_1(x) = 1 + x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

(c) La tangente en 0 a pour équation : $y = 1 + x$. (on la calcule avec la formule habituelle : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ou on utilise le DL précédent.) On utilise le fait que f_1 est concave (sa dérivée seconde est négative) donc C_1 est située en dessous de ses tangentes. *Conclusion* : C_1 est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

(d) Limites en $+\infty$:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ par composée de limites.

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{x} &= \frac{1}{x} \left(1 + \ln \left(x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(x)} \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(x)} = 0$ par produit de limites.

```
(e) import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,p) :
    y=1+np.log(x+p)
    return y

x=np.linspace(-0.9,9,100)
plt.plot(x,f(x,1),label="f1")
plt.plot(x,f(x,np.e),label="fe")
plt.plot(x,x+1,label="tangente en 0")
plt.legend()
plt.grid()
plt.axis('equal')
plt.show()
```

3. Valeur approchée de α_1 .

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1,3]$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$

(a) Au vu de la question d'après il vaut mieux prouver que $u_n \in [1,3]$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \in [1,3]$.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 1 \in [1,3]$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [1,3]$.

On a f_1 qui est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ comme composée de fonctions strictement croissantes sur $[1, +\infty[$.

Alors par HR, $f_1(3) \geq f_1(u_n) \geq f_1(1) = 1 + \ln(2) \geq 1$ et $f_1(3) = 1 + \ln 4 \leq 3$ car $\ln 2 \leq 1$ (et u_n et 1 sont éléments de $[1, +\infty[$) donc $u_{n+1} \in [1,3]$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \in [1, 3].}$

(b) On a :

$-f_1$ est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

$-f'_1(x) = \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Donc $|f'_1(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.

-pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in [1, 3]$ et $\alpha_1 \in [1, 3]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f_1 entre u_n et α_1 on a pour tout entier naturel n :

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| \text{ ou encore } |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| (*)$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Pour $n = 0$ on a $|u_0 - \alpha_1| = \alpha_1 - 1 \leq 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ car $\alpha_1 \in [1, 3]$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

On a d'après (*) que : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$.

Puis par hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ D'où : } |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$

(c) Si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$ alors $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$. Donc on cherche un entier n_0 tel que :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \iff (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4 \ln(10) \iff (n-1) \geq 4 \ln(10) / \ln(2) \iff n \geq 1 + 4 \ln(10) / \ln(2)$$

qui est réalisé pour la partie entière plus 1.

Conclusion : en prenant $\boxed{n_0 = \lfloor 1 + 4 \ln(10) / \ln(2) \rfloor + 1}$, la condition est réalisée.

```
(d) import numpy as np
n0=int(np.floor(1+4*np.log(10)/np.log(2))+1)
u=1
for n in range(n0+1) :
    u=1+np.log(1+u)
print (n0,u)
```

Exercice 3. Ecricome 2006

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

Partie I : Etude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : P_0(x) = 1, P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. On peut faire par étape :

f est définie sur E car toute fonction polynôme est dérivable.

Soit P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

P' sera de degré inférieur ou égal à 1. et $x \rightarrow (x-1)P'(x) + P(x)$ sera un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Donc $\boxed{f \text{ est une application de E dans E.}}$

Pour la linéarité :

Soient P et R de E et α réel, on a par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + R)(x) &= (x-1)(\alpha P + R)'(x) + (\alpha P + R)(x) \\ &= (x-1)\alpha P'(x) + (1-x)R'(x) + \alpha P(x) + R(x) \\ &= \alpha f(P)(x) + f(R)(x) \end{aligned}$$

Donc $f(\alpha P + R) = \alpha f(P)(x) + f(R)(x)$

Conclusion : f est un endomorphisme de E

On peut aussi faire :

Soit $P \in E : P(x) = a + bx + cx^2$

Alors $f(P)$ est définie et $f(P)(x) = (x-1)(b+2cx) + a + bx + cx^2 = a - b + (2b-2c)x + 3cx^2$

Donc $f(P)$ est un polynôme de E .

2. On calcule les images des vecteurs de la base canonique, et leurs coordonnées.

$P(x) = 1$ alors $P'(x) = 0$ et $f(P)(x) = P(x) = 1$ (coordonnées $(1, 0, 0)$)

$P(x) = x$ alors $P'(x) = 1$ et $f(P)(x) = (x-1) + x = 2x - 1$ (coordonnées $(-1, 2, 0)$)

$P(x) = x^2$ alors $P'(x) = 2x$ et $f(P)(x) = (x-1)2x + x^2 = 3x^2 - 2x$ (coordonnées $(0, -2, 3)$)

Donc la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de f étant triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale, A est inversible et donc f est bijective.

f étant un endomorphisme bijectif de E , c'est un automorphisme de E .

4. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Conclusion : les valeurs propres de A sont donc 1, 2 et 3.

Comme A a trois valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés à ces trois valeurs propres seront chacun de dimension 1 forcément.

Donc la concaténation des bases de ces sous-espaces propres forme une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Donc cette famille est une base de vecteurs propres de A , d'où d'après le cours : A est diagonalisable.

5. On a

$$\text{pour tout réel } x : \quad R_0'(x) = 0, R_1'(x) = 1 \text{ et } R_2(x) = 2(x-1)$$

donc

$$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= 0 + 1 = 1 \\ f(R_1)(x) &= (x-1) + x - 1 = 2(x-1) \\ f(R_2)(x) &= (x-1)2(x-1) + (x-1)^2 = 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $f(R_0) = R_0 : f(R_1) = 2R_1 : f(R_2) = 3R_2$

6. Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de E .

Cette famille est composée de trois vecteurs de E et $\dim(E) = 3$, il suffit donc de montrer qu'ils forment une famille libre de E .

On résout l'équation $\alpha R_0(x) + \beta R_1(x) + \gamma R_2(x) = 0$

Soit : $\alpha - \beta + (\beta - 2\gamma)x + \gamma x^2 = 0$

D'où par principe d'identification des coefficients :

On obtient : $\alpha = \beta = 2\gamma$ et $\gamma = 0$ d'où : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc la famille est libre donc :

Conclusion : $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E .

On a leurs coordonnées dans la base canonique :

$R_0(x) = 1$: coordonnées $(1, 0, 0)$

$R_0(x) = x - 1$: coordonnées $(-1, 1, 0)$

$R_2(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$: coordonnées $(1, -2, 1)$

Donc la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ s'obtient grâce à la question 5) :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. On vérifie pour tout réel x :

$$\begin{aligned} R_2 x + 2R_1(x) + R_0(x) &= x(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) &= (x-1) + 1 = P_1(x) \end{aligned}$$

Donc P_2 a pour coordonnées $(1, 2, 1)$ dans $\mathcal{B}'$

P_1 a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et enfin $P_0 = R_0$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}'$.

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ce que l'on peut vérifier en calculant le produit $P^{-1}P = I$)

8. La formule de changement de base donne alors $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1}$.

N.B. : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, l'ordre du produit s'inverse!

On a alors par récurrence

- Pour $n = 0$: $P[D^{-1}]^0 P^{-1} = I = A^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $[A^{-1}]^n = P[D^{-1}]^n P^{-1}$
alors $[A^{-1}]^{n+1} = A[A^{-1}]^n = PDP^{-1}P[D^{-1}]^n P^{-1} = P[D^{-1}]^{n+1} P^{-1}$

Conclusion : pour tout entier n : $[A^{-1}]^n = P[D^{-1}]^n P^{-1}$

la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$ est issue du produit par la troisième colonne de P^{-1} .

On connaît les puissances de D car D est diagonale.

$$\begin{aligned} [A^{-1}]^n &= P[D^{-1}]^n \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & 1 - 2 \cdot 2^{-n} + 3^{-n} \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie II : Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j , le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j .

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 0$)
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Les valeurs possibles de X_2 sont $\{0, 1, 2\}$.

On utilise le SCE ($X_1 = k$) $_{k \in \{0, 1, 2\}}$ et la formule des probabilités totales :

$$- P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 0).$$

Or, $P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ car quand on a tiré 2, il reste 0,1,2 pour le second tirage.

$P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ car quand on a tiré 1, il reste 0,2 pour le second tirage.

$P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \cdot 1$ car quand on a tiré 0, il reste 0 pour le second tirage.

$$\text{Donc } P(X_2 = 0) = \frac{11}{18}.$$

$$- \text{de même on a : } P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 1).$$

On remarque que pour avoir 1 au second, il doit être encore dans l'urne. Il faut donc avoir tiré 1 ou plus au premier.

$$\text{Donc : } P(X_2 = 0)P_{(X_1=2)}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

$$P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = 0.$$

$$\text{Donc } P(X_2 = 1) = \frac{5}{18}.$$

$$- \text{Enfin } P(X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 2).$$

Cela ne peut se produire que si l'on a tiré 2 au premier tirage et 2 au second.

$$\text{donc } P(X_2 = 2) = P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

i	0	1	2	
$P(X_2 = i)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	1
$iP(X_2 = i)$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$E(X_2) = \frac{1}{2}$

Conclusion : $E(X_2) = \frac{1}{2}$

2. ($X_k = 0, X_k = 1, X_k = 2$) forme un système complet d'événements donc d'après la FPT :

$$P(X_{k+1} = 0) = P_{X_k=0}(X_{k+1} = 0)P(X_k = 0) + P_{X_k=1}(X_{k+1} = 0)P(X_k = 1) + P_{X_k=2}(X_{k+1} = 0)P(X_k = 2)$$

$$= 1 \cdot P(X_k = 0) + \frac{1}{2} \cdot P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \cdot P(X_k = 2) \text{ et de même}$$

$$P(X_{k+1} = 1) = 0 \cdot P(X_k = 0) + \frac{1}{2} \cdot P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \cdot P(X_k = 2)$$

$$P(X_{k+1} = 2) = 0 \cdot P(X_k = 0) + 0 \cdot P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \cdot P(X_k = 2)$$

On a donc

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} U_k$$

et on vérifie que cette matrice A' est l'inverse de A en calculant leur produit :

$$A' \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N} : U_{k+1} = A^{-1}U_k$

3. On montre alors par récurrence immédiate que : (à faire vous même)

Conclusion : $U_k = [A^{-1}]^k U_0.$

4. Compléter le programme python, afin qu'il affiche $P(X_{10} = 0)$.

```
import numpy as np

A=np.array( [ [1, -1, 0] , [0 ,0 , -2] , [0, 0, 3]])
B=np.linalg.pinv(A)
U=np.array([[0],[0],[1]])

for i in range(11) :
    U=np.dot(A,U)

print(U[0])
```

5. Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(A^{-1})^k U_0$ donne la troisième colonne de $[A^{-1}]^k$ donc

$$P[X_k = 0] = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$P[X_k = 1] = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$P[X_k = 2] = \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car on a reconnu $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ avec $-1 < q < 1$