

S4.3 - Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Table des matières

- 1 Retour sur l'oscillateur harmonique amorti 1
- 2 Régime transitoire 4
- 3 Régime sinusoïdal forcé - Notation complexe 7
- 4 Résonance en élongation 9
 - 4.1 Amplitude de l'élongation 9
 - 4.2 Phase de l'élongation 10
- 5 Résonance en vitesse 12
 - 5.1 Amplitude complexe de la vitesse 12
 - 5.2 Amplitude de la vitesse 13
 - 5.3 Phase de la vitesse 14
- 6 Circuit RLC série en régime sinusoïdal 15
 - 6.1 Equation différentielle et analogie électro-mécanique 15
 - 6.2 Etablissement du régime forcé 17
 - 6.3 Régime sinusoïdal forcé 17
- 7 Utilisation des impédances complexes 18
 - 7.1 Impédance complexe d'une résistance 18
 - 7.2 Impédance complexe d'un condensateur 19
 - 7.3 Impédance complexe d'une bobine 19
 - 7.4 Généralisation 19
 - 7.5 Application au circuit RLC série 20
- 8 Analyse des oscillogrammes 20

1 Retour sur l'oscillateur harmonique amorti

Définition

Un système se trouve en régime sinusoïdal forcé lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale et que le régime transitoire est terminé. La réponse du système est alors sinusoïdale.

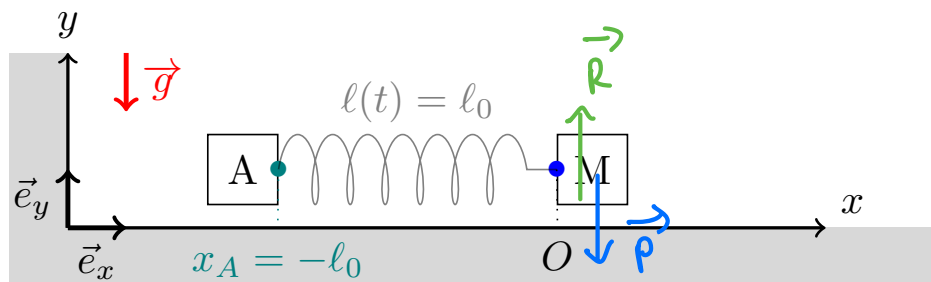
◇ Première approche pour réaliser une excitation sinusoïdale :

Soit un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'extrémité gauche est fixée en A, d'abscisse $x_A(t)$, à une masselotte dont on peut forcer le mouvement grâce à un dispositif non représenté sur la figure 1. L'autre extrémité du ressort (à droite) est fixée en M, d'abscisse $x(t)$, à une autre masselotte de masse m .

Les deux masselottes glissent sans frottement solide sur une table à coussin d'air, elles sont astreintes à se déplacer avec un mouvement rectiligne parallèle à l'axe (Ox) de vecteur unitaire $\vec{e}_x$.

A l'équilibre et en l'absence d'excitation, le point A est fixe à l'abscisse $x_A = -\ell_0$ et le point M est fixe à l'abscisse $x = 0$.

Ressort à l'équilibre en l'absence d'excitation :



Ressort en mouvement avec excitation :

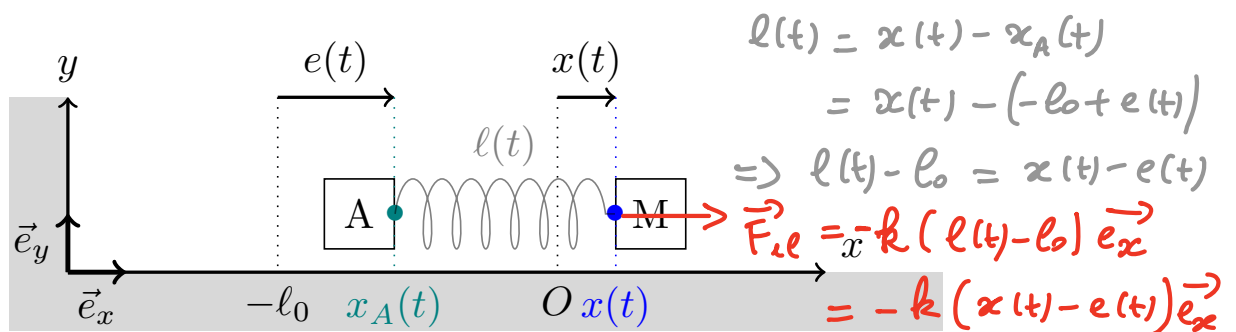


Figure 1 – Oscillateur horizontal en régime sinusoïdal.

En présence d'une excitation notée $e(t)$, le point A est animé d'un mouvement sinusoïdal tel que :

$$x_A(t) = -\ell_0 + e(t) \quad \text{avec} \quad e(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

Où $e(t)$ est appelée excitation sinusoïdale de l'oscillateur, X_0 est l'amplitude de l'excitation et ω sa pulsation, la phase initiale de $e(t)$ est prise nulle, ce qui revient à prendre l'excitation pour origine des phases.

On va étudier le mouvement de la masselotte de droite repérée par $x(t)$, ce mouvement est amorti par frottement visqueux :

$$\vec{f} = -h\dot{x}\vec{e}_x$$

Où h est le coefficient de frottement visqueux.

La position $x(t)$ de la masse de droite est repérée par rapport à sa position d'équilibre en l'absence d'excitation. Le PFD en projection sur $\vec{e}_x$ nous donne :

$$m\ddot{x}(t) = \underbrace{-k(\ell(t) - \ell_0)}_{\vec{F}_{el} \cdot \vec{e}_x} - \underbrace{h\dot{x}(t)}_{\vec{f} \cdot \vec{e}_x}$$

On peut remarquer graphiquement que

$$\ell(t) = x(t) - x_A(t) = x(t) - (-\ell_0 + e(t)) = \ell_0 + x(t) - e(t)$$

On obtient alors : $m\ddot{x} = -k(x-e) - h\dot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = ke(t) = kX_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

Cette équation différentielle (1) sera ensuite comparée à l'équation différentielle de l'oscillateur électrique (11) pour établir une analogie.

◇ Deuxième approche pour réaliser une excitation sinusoïdale :

Nous nous intéressons maintenant à un oscillateur harmonique horizontal, amorti par frottement visqueux et soumis à une force d'excitation sinusoïdale $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ et dont l'extrémité gauche est fixe cette fois (figure 2). La masselotte est repérée par l'abscisse $x(t)$ de son point de fixation M au ressort.

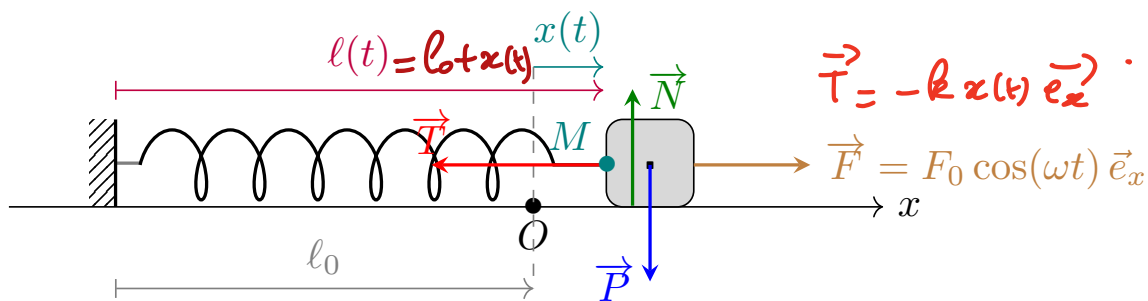


Figure 2 – Oscillateur horizontal simplifié en régime sinusoïdal.

Nous retrouvons les forces du régime libre (force de rappel, frottements) qui constituent la partie homogène de l'équation différentielle plus la force excitatrice qui donne naissance à un second membre de l'équation différentielle :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - h\dot{x}(t) + F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

On voit que cette équation différentielle (2) est la même que (1) en posant $kX_0 = F_0$

Propriété

Autrement dit, faire osciller l'extrémité gauche du ressort avec une amplitude sinusoïdale, revient à appliquer une force d'excitation sinusoïdale à la masse attachée à l'extrémité droite (l'extrémité gauche restant fixe). La première approche est la plus réaliste d'un point de vue pratique mais c'est souvent la deuxième approche qui est utilisée dans les exercices pour simplifier.

Pour la suite de ce cours, on ne retiendra que le premier mode d'excitation qui est plus réaliste. L'équation différentielle sous forme canonique est :

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} X_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

avec $2\alpha = \frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Où Q est le facteur de qualité de l'oscillateur, ω_0 sa pulsation propre et

X_0 est l'amplitude de l'excitation, ω la pulsation de l'excitation .

Plus loin dans le cours, on fera l'analogie entre cette équation (3) et l'équation (15) de l'oscillateur électrique.

2 Régime transitoire

On a réalisé une simulation (figure 3) avec une amplitude de l'excitation $X_0 = 1 \text{ cm}$, un mobile (masse de droite) de position initiale $x(0) = X_0 = 1 \text{ cm}$ et de vitesse initiale nulle $\dot{x}(0) = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dans ces conditions le ressort a sa longueur à vide lors du démarrage de l'excitation, ce qui est le plus réaliste d'un point de vue physique : lorsqu'on démarre l'expérience, le ressort est immobile.

Les paramètres de l'oscillateur sont les suivants :

$k = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$	(raideur)
$m = 0,1 \text{ kg}$	(masse)
$h = 0,05 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$	(coef. de frottement fluide)

On en déduit la pulsation propre et le facteur de qualité :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{0,1 \text{ kg}}} \approx 3,16 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$Q = \frac{\sqrt{k m}}{h} = \frac{m \omega_0}{h} = \frac{0,1 \text{ kg} \times 3,16 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}{0,05 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}} \approx 6,32$$

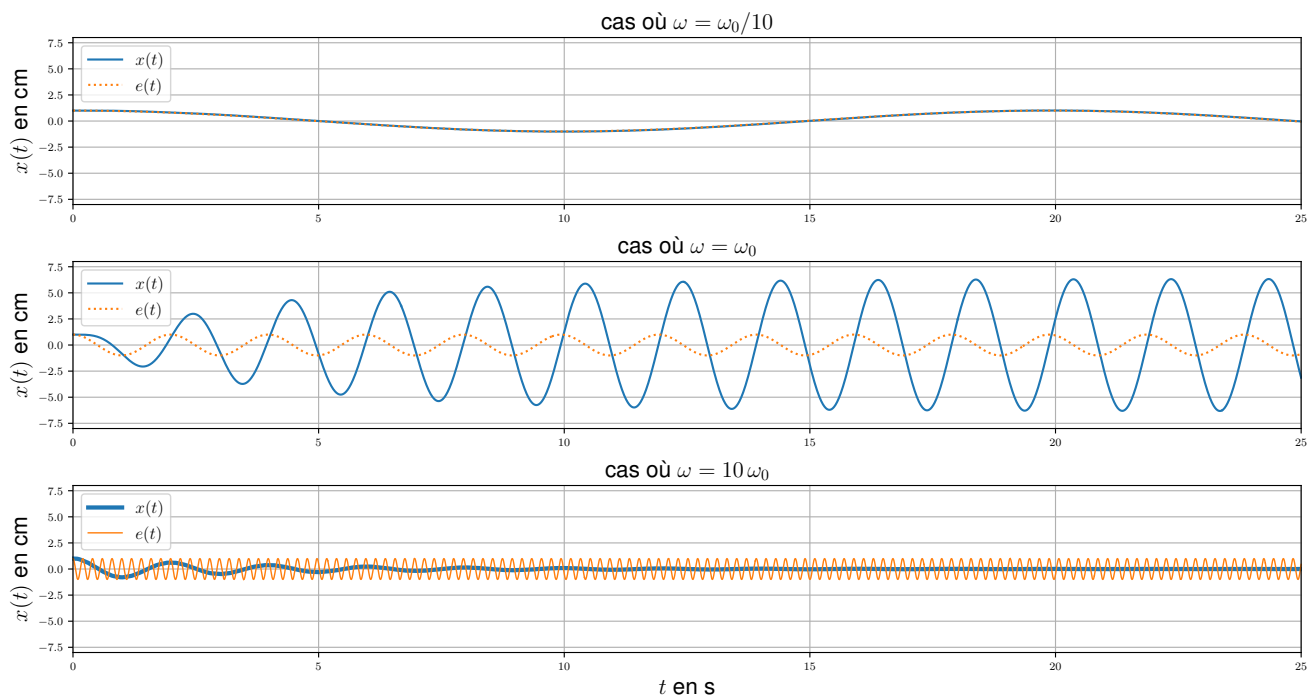


Figure 3 – Réponse de l'oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.

Observation expérimentales / résultats des simulations

Comme observé sur la figure 3, après un régime transitoire, la réponse $x(t)$ de l'oscillateur est sinusoïdale et de même pulsation que l'excitation $e(t)$.

Définition

On dira qu'on est en **régime transitoire** tant que $x_h(t)$, solution de l'équation homogène sans second membre associée à (3), n'est pas négligeable devant $x_p(t)$, la solution particulière de (3).

La solution de (3) est la somme :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

◇ $x_h(t)$, solution homogène de l'équation (3) sans second membre, est solution de

$$\ddot{x}_h(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_h(t) + \omega_0^2 x_h(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle sans second membre tend vers 0 plus au moins rapidement suivant la valeur de Q et de ω_0 (voir Chapitre S4.2).

◇ $x_p(t)$, solution particulière de (3), est donc la seule qui subsiste.

Propriété

La solution particulière $x_p(t)$ de (3) est une fonction sinusoïdale qui oscille avec la même pulsation ω que l'excitation, elle est de la forme :

$$x_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On va chercher à déterminer par la suite son **amplitude** $X_m > 0$ et sa **phase initiale** $\varphi \in]-\pi; \pi]$.

On a tracé le régime transitoire pour le cas où $\omega = \omega_0$ sur la figure 4, on voit clairement $x_p(t)$ rejoindre $x(t)$ au bout d'un temps suffisamment long au bout duquel $x_h(t)$ est nulle. Et $x_h(t)$ correspond bien à la courbe pseudo-périodique amortie attendue pour ce système du second ordre faiblement amorti.

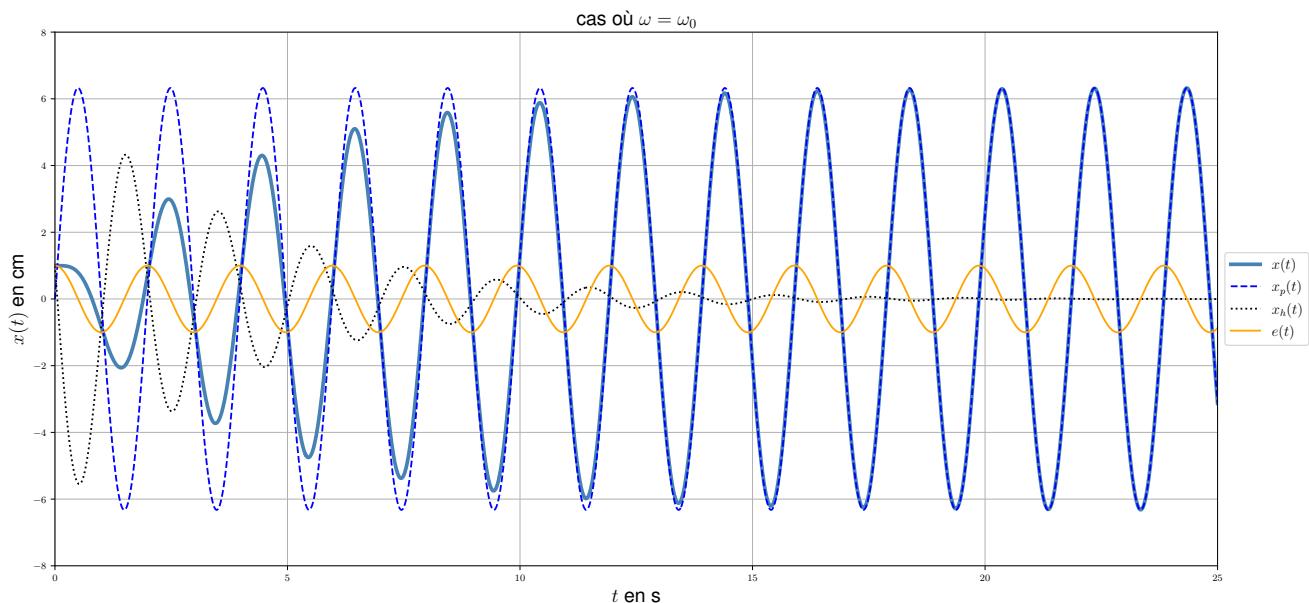
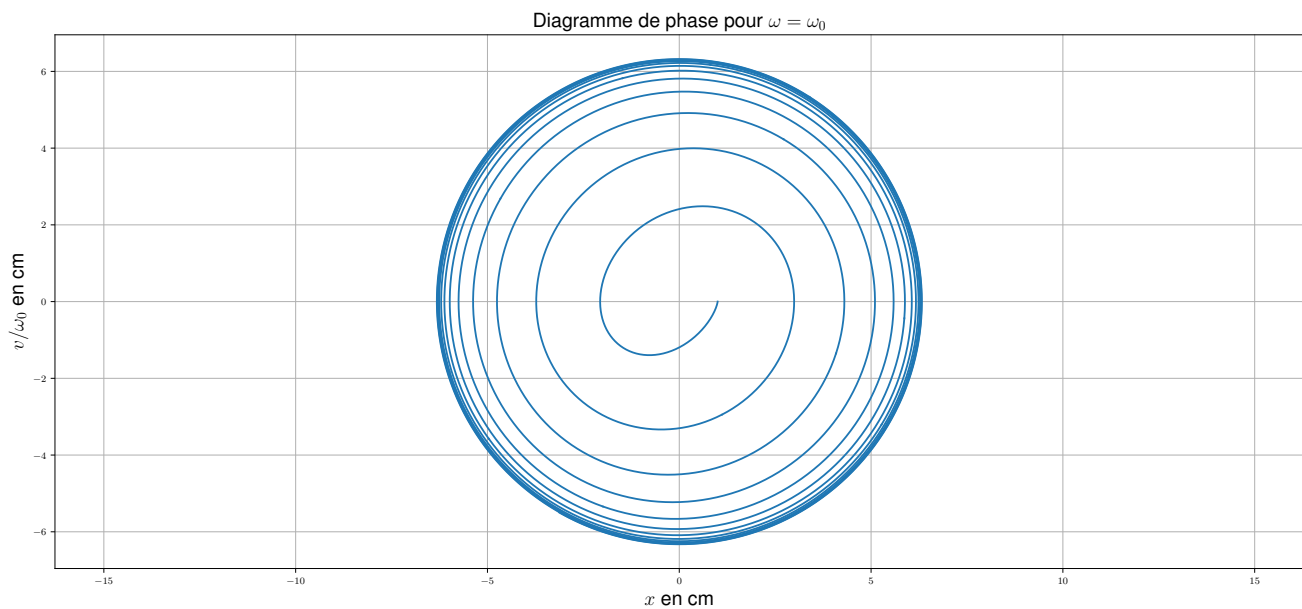


Figure 4 – Régime transitoire suivi du régime sinusoïdal établi pour $\omega = \omega_0$.

Le diagramme de phase tend vers un cercle une fois le régime transitoire passé (figure 5).

Figure 5 – Diagramme de phase pour $\omega = \omega_0$.

On a également tracé le régime permanent (la courbe commence à $t = 20$ s) pour le cas où $\omega = 10\omega_0$ sur la figure 6, on observe $x_p(t) = x(t)$ qui est d'amplitude très faible et en opposition de phase par rapport à $e(t)$.

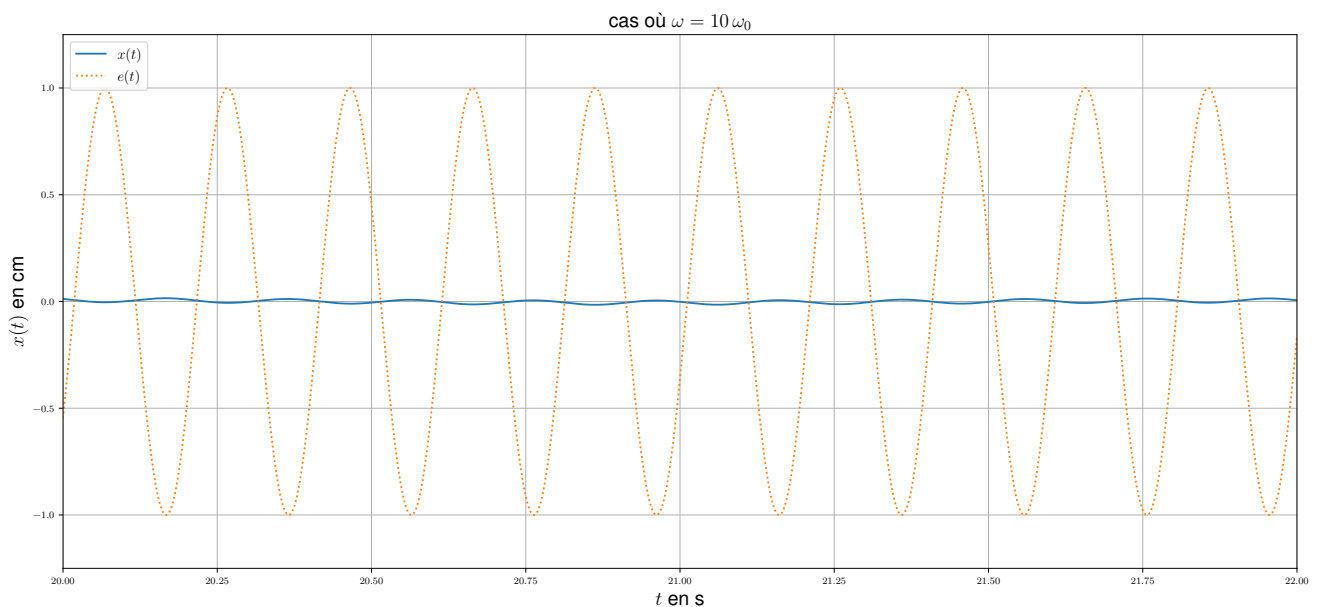


Figure 6 – Régime sinusoïdal établi en haute fréquence.

3 Régime sinusoïdal forcé - Notation complexe

Comme nous l'avons défini, le système est en **régime sinusoïdal forcé** lorsque $x_h(t)$ devient négligeable devant $x_p(t)$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \simeq x_p(t)$$

On considérera donc dans toute la suite du cours que $x(t) = x_p(t)$ et on travaillera alors avec les représentations complexes.

Définition

On appelle représentation complexe de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe notée $\underline{x}(t)$, telle que :

$$\underline{x}(t) = X_m \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underbrace{X_m \exp(j\varphi)}_{\underline{X}} \exp(j\omega t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$$

où $\underline{X} = X_m \exp(j\varphi)$ est l'**amplitude complexe** associée à $x(t)$ qui contient les informations sur l'amplitude **et** la phase initiale de $x(t)$.

La représentation complexe $\underline{x}(t)$ associée à $x(t)$ est donc telle que sa partie réelle est égale à $x(t)$:

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t))$$

On en déduit que :

$$\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = j\omega \underline{X} \exp(j\omega t) = j\omega \underline{x}(t)$$

et

$$\ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \underline{X} \exp(j\omega t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

Propriété admise

Si $x(t)$ est solution particulière de (3), alors $\underline{x}(t)$ est également solution particulière de (3) où l'on remplace chaque grandeur instantanée par sa représentation complexe.

En utilisant cette propriété, on obtient :

$$\ddot{\underline{x}}(t) + 2\alpha \dot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 X_0 \exp(j\omega t)$$

qui devient

$$\Rightarrow -\omega^2 \underline{x}(t) + 2\alpha j\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2) \underline{X} \exp(j\omega t) = \omega_0^2 X_0 \exp(j\omega t)$$

soit

$$\underline{X} = \frac{(\omega_0^2 X_0) / \omega_0^2}{\omega_0^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega \right)} = \frac{X_0 \times Q}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right) \times Q}$$

que l'on peut aussi écrire en introduisant le rapport $\frac{\omega}{\omega_0} = u$:

$$\underline{X}(u) = \frac{Q X_0}{Q(1 - u^2) + ju} \quad (4)$$

L'idée étant de faire apparaître au numérateur la grandeur $Q X_0$ homogène à une longueur.

4 Résonance en élongation

4.1 Amplitude de l'élongation

L'amplitude $X_m(u)$ est égale au module de $\underline{X}(u)$, d'après (4) on trouve :

$$X_m(u) = |\underline{X}| = \frac{QX_0}{\sqrt{Q^2(1-u^2)^2 + u^2}} \quad (5)$$

On comprend donc que l'amplitude $X_m(u)$ de la réponse en élongation du système dépend de la pulsation ω (la variable) de l'excitation, que l'on peut faire varier. Alors que Q , ω_0 et X_0 sont des paramètres. La valeur de Q et ω_0 est intrinsèque à l'oscillateur, de même celle de X_0 est a priori laissée inchangée par l'expérimentateur.

On a tracé la courbe $X_m(\omega)$ pour différentes valeurs de Q , à savoir $Q = 10, 4, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,1$

Amplitude de $x(t)$ (ou de la charge $q(t)$) en fonction de la pulsation ω

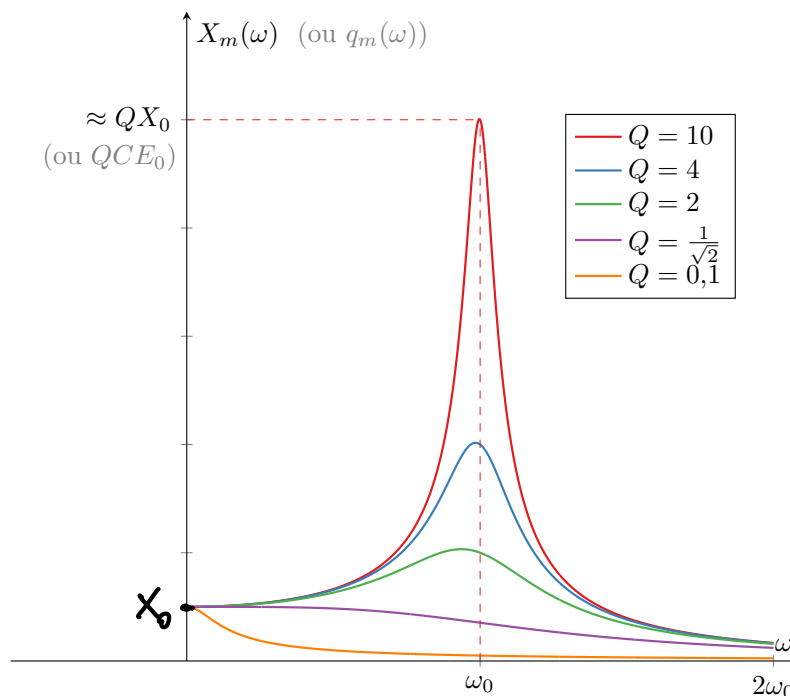


Figure 7 – Amplitude de l'élongation

Cette figure correspond également au tracé de $q_m(\omega)$ donné par l'équation (17) pour l'oscillateur électrique.

Propriété admise

On montre que $X_m(\omega)$ admet un extremum $X_m(0) = X_0$ pour $\omega = 0$ et un autre extremum à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, appelée pulsation de résonance en

élongation ^a, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Cela revient à dire qu'

il y a résonance en élongation seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

a. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

Si la résonance est aiguë (par exemple pour la courbe $Q = 10$), soit un amortissement faible tel que $Q \gg 1$, alors $\omega_r \approx \omega_0$ et on obtient

$$X_m(\omega_r) \approx QX_0$$

On peut remarquer que plus Q diminue, plus ω_r diminue (par exemple pour les courbes $Q = 4$ et $Q = 2$) et qu'il n'y a plus de résonance pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (par exemple pour les courbes $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q = 0.1$).

Remarque

D'un point de vue pratique, tout ceci signifie que l'amplitude X_m de la réponse en élongation du système ne peut dépasser l'amplitude de l'excitation X_0 que lorsqu'il y a résonance, c'est-à-dire pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et qu'en cas de résonance aiguë, l'amplitude de la réponse en élongation $X_m(\omega_r \approx \omega_0)$ à la résonance est proportionnelle à QX_0 , ce qui peut permettre d'évaluer Q en pratique.

4.2 Phase de l'élongation

◇ Le déphasage $\varphi(u)$ de $x(t)$ par rapport à l'excitation $x_A(t)$ (prise comme origine des phases) est égal à l'argument de $\underline{X}(u)$, d'après (4) on obtient :

$$\varphi(u) = \arg(\underline{X}) = -\arg(Q(1 - u^2) + ju) = \arg(\underbrace{Q(1 - u^2) - ju}_{\approx}) \quad (6)$$

Pour trouver les asymptotes ou une valeur particulière de φ , il est plus commode d'utiliser directement l'équation (6), plutôt que d'utiliser les fonctions trigonométriques réciproques, par exemple on notera que :

$$\varphi(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \arg(Q(1 - 0^2) - j \times 0) = \arg(Q) = 0$$

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$$

$$\varphi(\omega_0) = \arg(Q(1 - 1^2) - j \times 1) = \arg(-j) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\mu = 1$$

$$\varphi(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \arg(-Qu^2) = -\pi \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \infty \\ \mu &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

D'après (6), on peut aussi écrire :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = -\frac{u}{Q(1-u^2)} \quad \text{et} \quad \cos \varphi \quad \text{du signe de} \quad (1-u^2)$$

Si $\cos \varphi > 0 \Leftrightarrow u < 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$, alors :

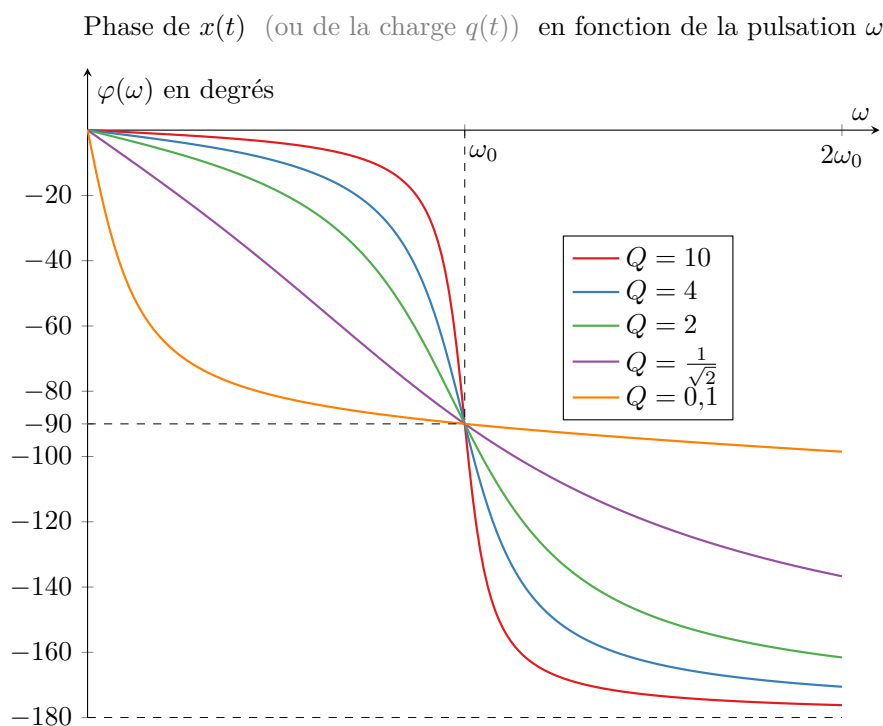
$$\varphi(u) = -\arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right) \quad \text{pour } \omega \in [0; \omega_0]$$

Si $\cos \varphi < 0 \Leftrightarrow u > 1 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$, alors :

$$\varphi(u) = -\pi - \arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right) \quad \text{pour } \omega \in [\omega_0; +\infty[.$$

On notera qu'on a écrit $-\pi$ et non $+\pi$ pour assurer la continuité de $\varphi(\omega)$ en $\omega = \omega_0$.

On a tracé la courbe $\varphi(\omega)$ pour différentes valeurs de Q , à savoir $Q = 10, 4, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,1$



Cette figure correspond également au tracé de φ donné par l'équation (18) pour l'oscillateur électrique.

5 Résonance en vitesse

5.1 Amplitude complexe de la vitesse

Définition

Comme le système est soumis à une excitation sinusoïdale, en régime établi toutes les grandeurs du système vont osciller à la pulsation ω . On note alors la vitesse

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Comme nous l'avons fait pour l'élongation, on peut définir $\underline{v}(t)$, représentation complexe de la **vitesse algébrique** $v(t)$, la grandeur complexe telle :

$$\underline{v}(t) = V_m \exp(j(\omega t + \varphi_v)) = \underbrace{V_m \exp(j\varphi_v)}_{\underline{V}} \exp(j\omega t) = \underline{V} \exp(j\omega t) \quad (7)$$

où $\underline{V} = V_m \exp(j\varphi_v)$ est l'**amplitude complexe** associée à $v(t)$ qui contient les informations sur l'amplitude **et** la phase initiale de $v(t)$.

De par sa définition, la partie réelle de $\underline{v}(t)$ est égale à $v(t)$:

$$v(t) = \text{Re}(\underline{v}(t))$$

Exprimons la représentation complexe de la vitesse :

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} \Rightarrow \underline{v}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt}(t) = j\omega \underline{x}(t) = \underbrace{j\omega \underline{X}}_{\underline{V}} \exp(j\omega t)$$

Par identification avec la formule (7), on en déduit :

$$\underline{V} = j\omega \underline{X} \frac{j\omega Q}{j\omega Q} \frac{j\omega \omega_0^2 X_0}{(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q})} = \frac{Q\omega_0 X_0}{j\frac{Q\omega_0^2}{\omega} - j\frac{Q\omega^2}{\omega_0} + 1}$$

Soit au final :

$$\underline{V}(u) = \frac{Q\omega_0 X_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{Q\omega_0 X_0}{1 + jQ \left(u - \frac{1}{u} \right)} \quad (8)$$

L'idée étant de faire apparaître au numérateur la grandeur $Q\omega_0 X_0$ homogène à une vitesse.

5.2 Amplitude de la vitesse

◇ L'amplitude $V_m(u)$ est égale au module de $\underline{V}(u)$ qui se calcule d'après (8) :

$$V_m(u) = \frac{Q\omega_0 X_0}{\sqrt{Q^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + 1}} \quad (9)$$

On voit immédiatement d'après (9) que $V_m(u)$ est maximale pour $u = 1$, c'est-à-dire que $V_m(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$.

Propriété

L'amplitude $V_m(\omega)$ de la vitesse a toujours un maximum en $\omega = \omega_0$ quelle que soit la valeur de Q , autrement dit :

il y a toujours résonance en vitesse à la pulsation ω_0 et

$$\mu = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

$$V_m(\omega_0) = Q\omega_0 X_0$$

On a tracé la courbe $V_m(\omega)$ pour différentes valeurs de Q , à savoir $Q = 10, 4, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.1$

Amplitude de $v(t)$ (ou de $i(t)$) en fonction de la pulsation ω

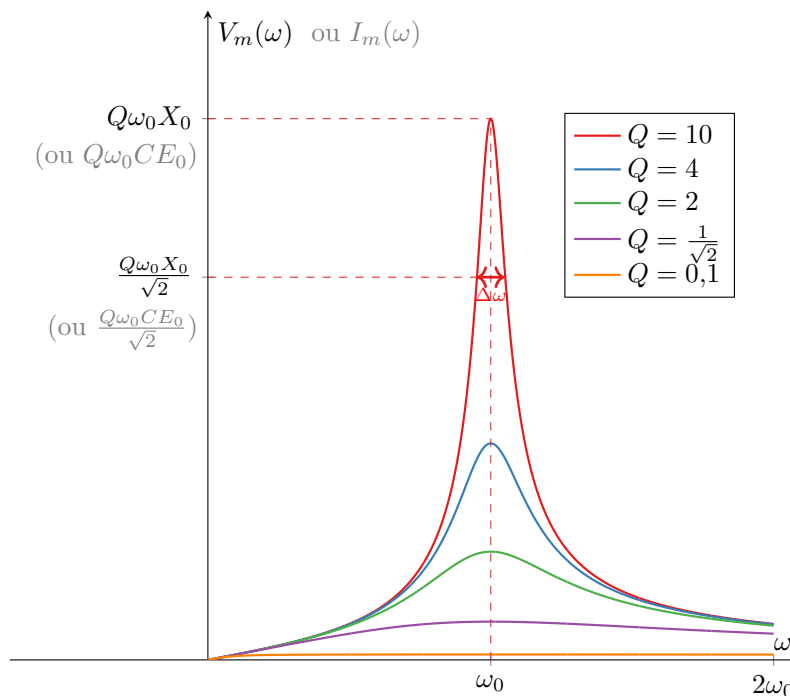


Figure 9 – Amplitude de la vitesse

C'est aussi l'allure de l'amplitude de l'intensité du courant d'amplitude complexe $\underline{I}$ donnée par (22).

Définition

La **bande passante en vitesse** est la largeur de la bande de pulsation $[\omega_1; \omega_2]$ telle que

$$V_m(\omega_1) = V_m(\omega_2) = \frac{V_m(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{Q\omega_0 X_0}{\sqrt{2}}$$

On note $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ cette bande passante représentée sur la figure 9.

Propriété admise

La **bande passante en vitesse** de l'oscillateur mécanique horizontal est liée au facteur de qualité Q et à la pulsation propre ω_0 par la formule :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

5.3 Phase de la vitesse

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \underline{v} e^{j\omega t} \\ \underline{x} &= \underline{x} e^{j\omega t}\end{aligned}$$

◇ Le déphasage φ_v de $v(t)$ par rapport à l'excitation $x_A(t)$ (prise comme origine des phases) est égal à l'argument de $\underline{V}$:

$$\underline{V} = j\omega \underline{x} \quad \text{car} \quad \bar{v} = \frac{dx}{dt} = j\omega \bar{x}$$

$$\varphi_v(\omega) = \arg \underline{V} = \arg(j\omega \underline{x}) = \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega)$$

On peut aussi trouver l'expression de $\varphi_v(\omega)$ d'après (8) :

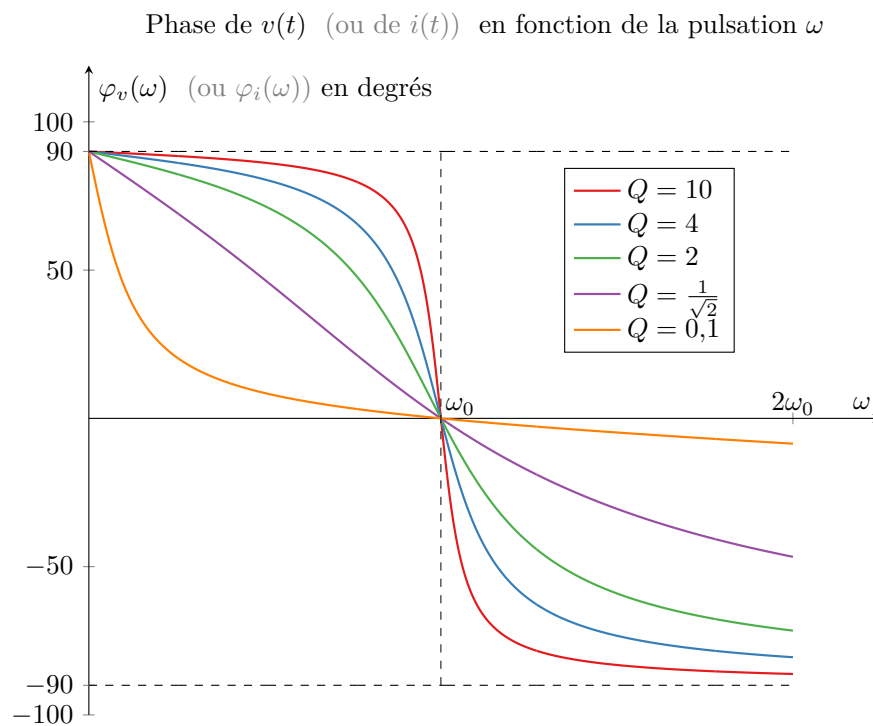
$$\varphi_v(u) = \arg(\underline{V}) = -\arg\left(1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)\right) \quad (10)$$

D'après (10), on peut remarquer que $\cos \varphi_v > 0$ et écrire :

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(Q\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)$$

On a tracé la courbe $\varphi(\omega)$ pour différentes valeurs de Q , à savoir $Q = 10, 4, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.1$

C'est aussi l'allure de la phase de l'intensité du courant d'amplitude complexe $\underline{I}$ donnée par (22).



6 Circuit RLC série en régime sinusoïdal

6.1 Equation différentielle et analogie électro-mécanique

Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension possède une force électromotrice $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 1\text{ V}$, de phase initiale nulle ($e(t)$ est prise comme origine des phases), et de pulsation ω . Cette f.é.m constitue l'excitation sinusoïdale du circuit RLC série :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

On donne aussi $C = 0,1\text{ }\mu\text{F}$, $L = 0,15\text{ H}$ et R est la résistance totale du circuit quand K est fermé. Pour évaluer la résistance totale du circuit, on doit prendre en compte la résistance interne du générateur $R_g = 50\text{ }\Omega$, la résistance interne de la bobine $r = 13\text{ }\Omega$ plus une boîte à décade dont on peut faire varier la résistance R_1 qui est placée en série avec L et C . A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le condensateur est déchargé (figure 11) :

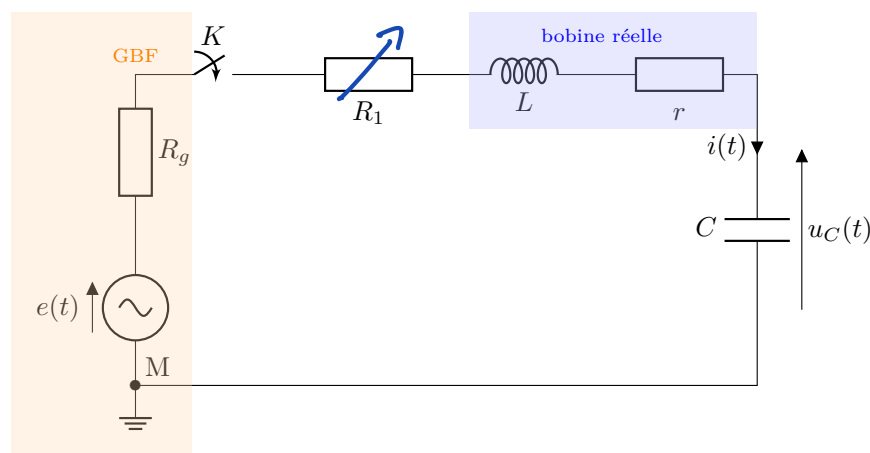


Figure 11 – Circuit R, L, C série.

Ainsi, une fois l'interrupteur K fermé, le circuit est équivalent au circuit de la figure 12 ci-dessous avec $R = R_1 + R_g + r$:

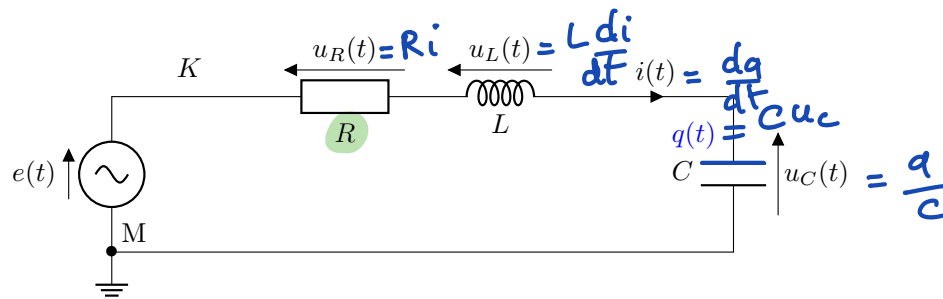


Figure 12 – Circuit R, L, C série équivalent.

L'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ de la plaque supérieure du condensateur est :

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (11)$$

Démonstration : On $u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$; $u_C = \frac{q}{C}$

D'après la loi des Mailles :

$$u_C(t) + u_L(t) + u_R(t) = e(t)$$

$$\frac{1}{C} \cdot q(t) + L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

On peut comparer (1) et (11) pour dresser un tableau des grandeurs analogues :

Analogie électro-mécanique	
grandeur mécanique	grandeur électrique
écart à la position d'équilibre : $x(t)$	$q(t)$: charge
vitesse algébrique : $\dot{x}(t)$	$i(t)$: intensité du courant
masse : m	L : inductance
coefficient de frottements : h	R : résistance
constante de raideur : k	$\frac{1}{C}$: inverse de la capacité
amplitude de l'excitation mécanique $e(t)$: X_0	CE_0 : $C \times$ amplitude de la f.é.m

L'équation différentielle (11) peut aussi se mettre sous la forme :

$$1 \ddot{q}(t) + \frac{R}{L} \dot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t) = \frac{1}{LC} C E_0 \cos(\omega t) \quad (12)$$

On reconnaît alors la pulsation propre ω_0 et la facteur de qualité Q de cet oscillateur :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8165 \text{ rad.s}^{-1} \quad (13)$$

et

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14)$$

L'équation différentielle (12) est l'analogue de l'équation différentielle (3) de l'oscillateur mécanique :

$$\ddot{q}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \omega_0^2 C E_0 \cos(\omega t) \quad (15)$$

6.2 Etablissement du régime forcé

Comme pour l'oscillateur mécanique, la solution de l'équation sans second membre associée à (15) va tendre rapidement vers 0 pour ne laisser place qu'à la solution particulière de (15) pour laquelle on va employer la méthode de résolution utilisant les représentations complexes des grandeurs électriques. Pour illustrer ce propos, voici sur la figure 13 ce qu'on l'on obtient après la fermeture de l'interrupteur K à $t = 0$ pour $\omega = \omega_0$:

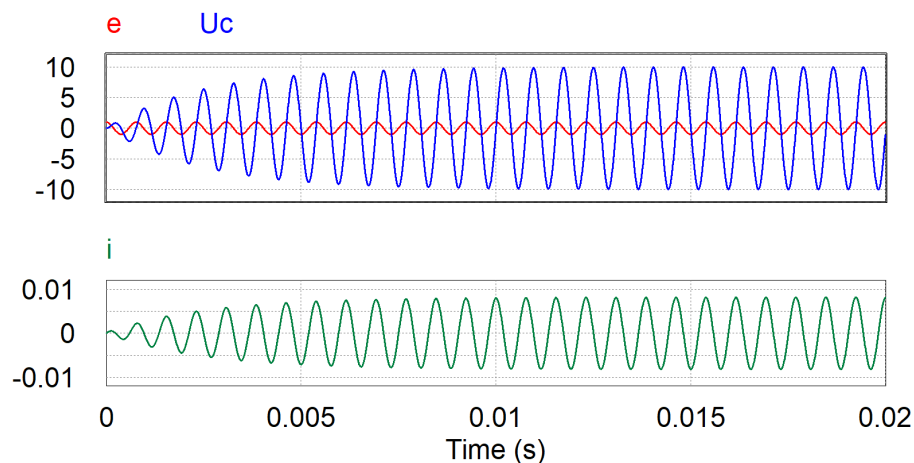


Figure 13 – Régime transitoire du circuit R, L, C série.

6.3 Régime sinusoïdal forcé

On s'intéresse maintenant au régime sinusoïdal forcé et on définit l'ensemble des grandeurs électriques :

Représentation complexe des grandeurs électriques

grandeur instantanée	représentation complexe	amplitude complexe
$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$	$\underline{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$	$\underline{E} = E_0$
$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{q}(t) = q_m \exp(j(\omega t + \varphi))$	$\underline{q}_m = q_m \exp(j\varphi)$
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$	$\underline{i}(t) = I_m \exp(j(\omega t + \varphi_i))$	$\underline{I} = I_m \exp(j\varphi_i)$
$u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{u}_C(t) = U_{Cm} \exp(j(\omega t + \varphi))$	$\underline{U}_C = U_{Cm} \exp(j\varphi)$
$u_L(t) = U_{Lm} \cos(\omega t + \varphi_L)$	$\underline{u}_L(t) = U_{Lm} \exp(j(\omega t + \varphi_L))$	$\underline{U}_L = U_{Lm} \exp(j\varphi_L)$

Pour des raisons évidente de clarté, la charge se distingue (en lettres minuscules) des autres grandeurs en terme de notation pour éviter une confusion avec le facteur de qualité Q . L'amplitude complexe de $\underline{q}(t)$ est notée $\underline{q}_m$ pour les distinguer. On remarquera également que $q(t)$ et $u_C(t)$ sont nécessairement en phase et que $q_m = CU_{Cm}$ puisque $q(t) = Cu_C(t)$.

La solution particulière de (15) s'obtient de la même manière que celle de (3), en remplaçant $\underline{x}(t)$ par $\underline{q}(t)$ et X_0 par CE_0 , on obtient :

$$\underline{q}_m = \frac{QCE_0}{Q(1 - u^2) + ju} \quad (16)$$

L'idée étant de faire apparaître au numérateur la grandeur QCE_0 homogène à une charge électrique.

L'amplitude q_m (figure 7) et la phase φ (figure 8) s'en déduisent comme pour l'oscillateur mécanique :

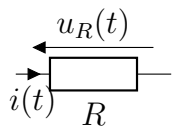
$$q_m(u) = |\underline{q}_m| = \frac{QCE_0}{\sqrt{Q^2(1 - u^2)^2 + u^2}} \quad (17)$$

$$\varphi(u) = \arg(\underline{q}_m) = -\arg(Q(1 - u^2) + ju) \quad (18)$$

On notera que cette méthode de résolution partant de l'équation différentielle (15) peut vite s'avérer fastidieusement, on lui préférera la méthode développée au paragraphe suivant.

7 Utilisation des impédances complexes

7.1 Impédance complexe d'une résistance



La relation qui lie la tension $u_R(t)$ aux bornes d'une résistance R et l'intensité du courant la traversant (en convention récepteur) est :

$$u_R(t) = Ri(t)$$

En notation complexe, cette relation devient :

$$\underline{u}_R(t) = R\underline{i}(t)$$

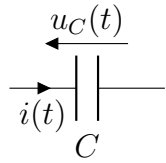
qu'on peut encore écrire comme une relation entre les amplitudes complexes :

$$\Rightarrow \underline{u}_R e^{j\omega t} = R \underline{i} e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_R = \underline{Z}_R \underline{I} \text{ avec } \underline{Z}_R = R \quad (19)$$

où $\underline{Z}_R$ est l'impédance complexe de la résistance. On notera que $u_R(t)$ et $i(t)$ sont en phase.

7.2 Impédance complexe d'un condensateur



La relation qui lie la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur de capacité C et l'intensité du courant le traversant (en convention récepteur) est :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = C \frac{du_C}{dt}(t)$$

En notation complexe, cette relation devient :

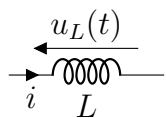
$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C}{dt}(t) \stackrel{\underline{u}_C = \underline{U}_C e^{j\omega t}}{=} jC\omega \underline{u}_C(t)$$

qu'on peut encore écrire comme une relation entre les amplitudes complexes :

$$\underline{U}_C e^{j\omega t} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} \text{ avec } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad (20)$$

où $\underline{Z}_C$ est l'impédance complexe du condensateur. On notera que $u_C(t)$ est en quadrature arrière (en retard de $\frac{\pi}{2}$) par rapport à $i(t)$.

7.3 Impédance complexe d'une bobine



La relation qui lie la tension $u_L(t)$ aux bornes d'une bobine d'inductance L et l'intensité du courant la traversant (en convention récepteur) est :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

En notation complexe, cette relation devient :

$$\underline{u}_L(t) = L \frac{d\underline{i}}{dt}(t) = jL\omega \underline{i}(t)$$

qu'on peut encore écrire comme une relation entre les amplitudes complexes :

$$\Rightarrow \underline{U}_L e^{j\omega t} = jL\omega \underline{I} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I} \text{ avec } \underline{Z}_L = jL\omega \quad (21)$$

où $\underline{Z}_L$ est l'impédance complexe de la résistance. On notera que $u_L(t)$ est en quadrature avant (en avance de $\frac{\pi}{2}$) par rapport à $i(t)$.

7.4 Généralisation

Propriété immédiate

Dans le cadre de l'ARQS, pour un circuit composé uniquement de **composants linéaires** (typiquement R , L , C) soumis à un **régime sinusoïdal forcé**, les lois générales de l'électrocinétique sont applicables en remplaçant chaque grandeur instantanée par son amplitude complexe et chaque dipôle par son impédance complexe.

7.5 Application au circuit RLC série

Revenons au circuit RLC série complet et écrivons la loi de mailles en utilisant les représentations complexes :

$$\underline{u}_C(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_R(t) = \underline{e}(t)$$

En utilisant les impédances complexes :

$$(\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R) \underline{i}(t) = \underline{e}(t) \Leftrightarrow (\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R) \underline{I} \exp(j\omega t) = E_0 \exp(j\omega t)$$

ou encore, avec les amplitudes complexes (l'amplitude complexe de $\underline{e}(t)$ est réelle car sa phase initiale est nulle) :

$$\underline{I} = \frac{E_0}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right)} \times \frac{1}{R}$$

$$\underline{I} = \frac{CE_0}{R} \times \frac{1}{1 + j \left(\frac{L}{R} \omega - \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\omega} \right)}$$

En utilisant (13) et (14), on peut remarquer que :

$$RC\omega_0^2 = \frac{RC}{LC} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{RC} = Q\omega_0$$

d'où :

$$\underline{I} = CE_0 \times \frac{1}{RC} \times \frac{1}{1 + j \left(\frac{Q}{\omega_0} \omega - Q\omega_0 \cdot \frac{1}{\omega} \right)}$$

Au final :

$$\underline{I} = \frac{Q\omega_0 CE_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{Q\omega_0 CE_0}{1 + jQ \left(u - \frac{1}{u} \right)} \quad (22)$$

L'amplitude I_m (figure 9) et la phase φ_i (figure 10) s'en déduisent comme pour l'oscillateur mécanique.

8 Analyse des oscillogrammes

En régime établi, on a représenté ci-dessous les différentes grandeurs électriques obtenues à la résonance d'intensité pour $\omega = \omega_0$ et $R = 122,5 \Omega$ soit $Q = 10$ sur la figure 14. Compte-tenu du facteur de qualité élevé, la résonance en tension (cela signifie résonance pour $u_C(t)$ donc aussi pour $q(t)$) s'observe également avec $\omega_r \approx \omega_0$.

Travail à effectuer : Mesurer les amplitudes et les phases des différents signaux et montrer qu'ils

sont en adéquation avec tous les résultats précédents.

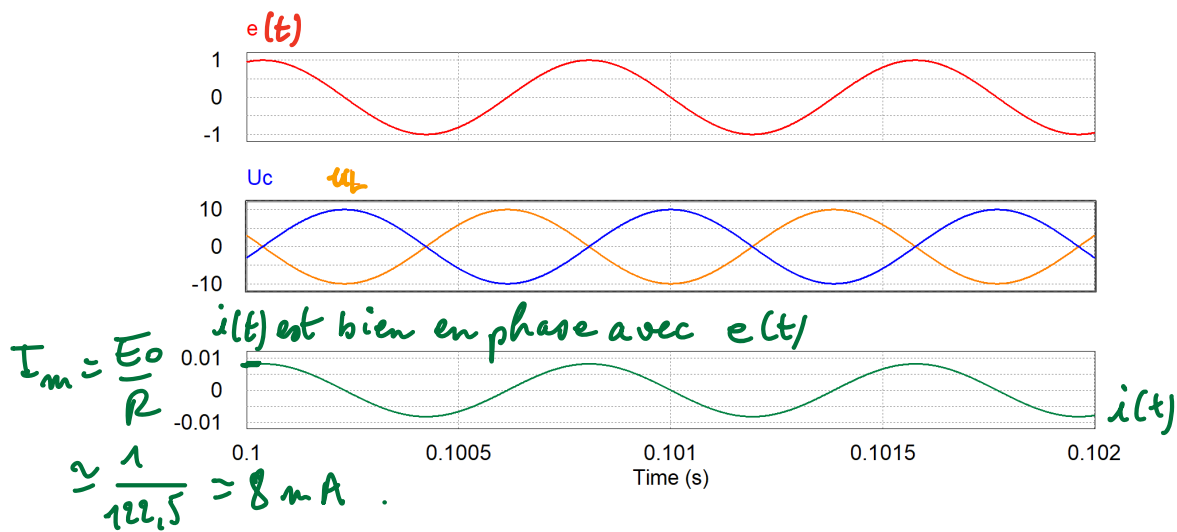
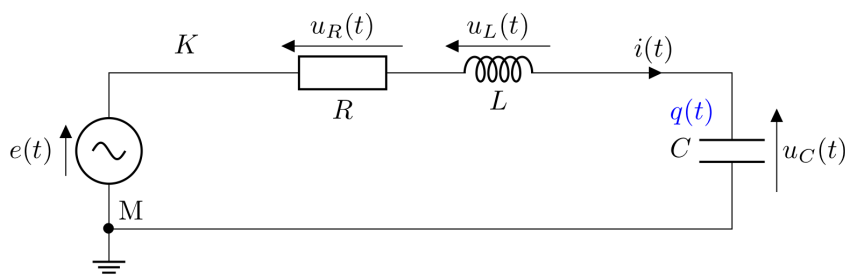


Figure 14 – Régime sinusoïdal forcé établi du circuit R, L, C série pour $\omega = \omega_0$



Pour $\omega = \omega_0$ $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L}$ or $\underline{Z}_C + \underline{Z}_L \stackrel{\omega=\omega_0}{=} 0$
 $= \frac{E_0}{R}$ car $j\frac{1}{C\omega} - jL\omega = 0$
 $j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = 0$
 $\Rightarrow \varphi_i = 0$ et $I_m = \frac{E_0}{R} = 8 \text{ mA}$.

* $\underline{U}_L \stackrel{\omega=\omega_0}{=} jL\omega_0 \underline{I} = jL\omega_0 \frac{E_0}{R} = jL \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{E_0}{R} E_0$
 $= j \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{R} E_0 = jQ E_0$
 $\Rightarrow U_{Lm} = |\underline{U}_L| = Q E_0 = 10 \text{ V}$ et $\varphi_L = \text{Arg}(\underline{U}_L) = \frac{\pi}{2}$
 * $\underline{U}_C = \frac{j \cdot 1}{j \cdot j C \omega_0} \times \frac{E_0}{R} = -j \cdot \frac{1}{C} \cdot \sqrt{LC} \times \frac{E_0}{R} = -j \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{R} E_0$
 $= -jQ E_0$

$$\Rightarrow U_{cm} = |U_c| = Q E_0 = 10V$$

$$\varphi_{uc} = \text{Arg}(U_c) = \text{Arg}(-j) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Rappel si } Z_L(\omega) + Z_C(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow jL\omega + \frac{j \cdot 1}{j \cdot j c \omega} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad jL\omega - \frac{j}{C\omega} = 0$$

$$(\Rightarrow) L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad (\Rightarrow) \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (\Rightarrow) \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$