

S9 : Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Table des matières

1	Champ électromoteur	1
2	Exemple du rail de Laplace : principe des générateurs électromécaniques	2
2.1	Calcul de la f.é.m. induite - Loi de Faraday	2
2.2	Puissance des forces de Laplace	4
2.3	Méthode de résolution des systèmes électromécaniques couplés	5
3	Principe de l'alternateur	5
3.1	Principe général	5
3.2	Interprétation physique	6
3.3	F.é.m. induite et équation électrique	6
3.4	Couple de Laplace et équation mécanique	7
3.5	Couple moteur	8
3.6	Bilan énergétique	8

1 Champ électromoteur

Définition : Induction de Lorentz.

Soit un circuit filiforme en mouvement dans un référentiel où règne un champ magnétique permanent. L'apparition de f.é.m. et de courants induits dans ce cas est appelée induction de Lorentz^a. L'effet du champ magnétique sur le circuit en mouvement équivaut à celui d'un générateur caractérisé par une force électromotrice dite de Lorentz.

^a. Hendrik Antoon Lorentz (18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas - 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien néerlandais. Il est co-lauréat avec Pieter Zeeman du prix Nobel de physique de 1902.

Propriété : Champ électromoteur et f.é.m. de Lorentz.

Soit $\vec{v}(M, t)$ la vitesse à l'instant t d'un point M d'un conducteur dans le référentiel du laboratoire. Soit $\vec{B}$ le champ magnétique dans le référentiel du laboratoire. On appelle champ électromoteur de Lorentz le terme :

$$\vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}$$

Ce champ a les mêmes effets qu'un champ électrique et s'ajoute aux champs électriques déjà existants. Sa circulation le long du circuit est la f.é.m. de Lorentz :

$$e(t) = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{\ell}$$

Cette f.é.m., notée $e(t)$, qui apparaît dans le circuit est alors orientée dans le sens choisi pour calculer la circulation du champ électromoteur.

2 Exemple du rail de Laplace : principe des générateurs électromécaniques

2.1 Calcul de la f.é.m. induite - Loi de Faraday

Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence les forces de Laplace et illustrer le principe des générateurs électro-mécaniques (figure 1). Il s'agit de deux rails horizontaux en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, notée $[AB]$. On note R la résistance totale du circuit que l'on supposera constante, même lorsque la barre se déplace. Le tout est plongé dans un champ magnétique permanent supposé uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$ obtenu grâce à un aimant. L'orientation du circuit est fixée arbitrairement conformément au schéma de principe dessiné en perspective ci-dessous (qui n'est pas le schéma électrique équivalent) :

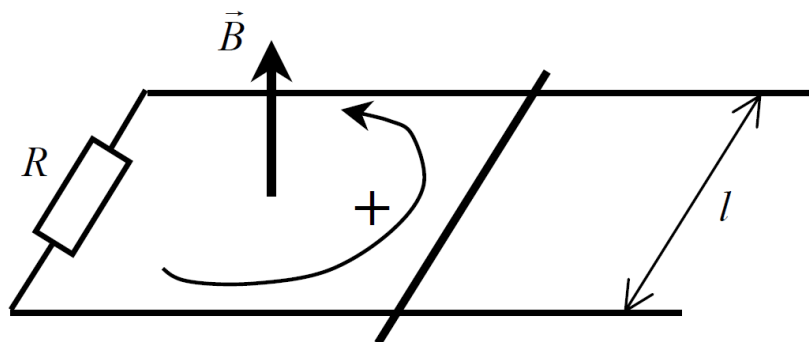


Figure 1 – Rail de Laplace

On opérateur anime la barre $[AB]$ d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ par rapport au référentiel lié au sol. La barre devient ainsi une portion de circuit électrique en mouvement dans un champ magnétique extérieur indépendant du temps : c'est un cas d'induction de Lorentz. En chaque

point M de la barre $[AB]$ règne un champ électromoteur

$$\vec{E}_m = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y$$

Le champ électromoteur est nul ailleurs. Le f.é.m. induite dans le circuit est obtenue en calculant la circulation de $\vec{E}_m$ le long du circuit.

Ici, nous choisissons arbitrairement de calculer la circulation dans le sens conventionnel choisi pour i :

$$e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_A^B -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = \int_{y=0}^{\ell} -vB dy = -vB\ell$$

On obtient alors le circuit électrique équivalent (figure 2) en orientant e dans le sens choisi pour calculer la circulation du champ électromoteur :

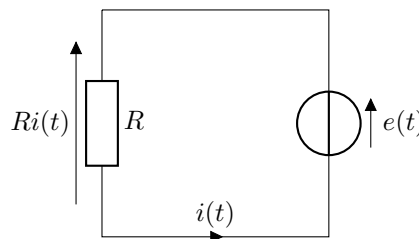


Figure 2 – Schéma électrique équivalent des rails de Laplace

Cela nous conduit à l'équation électrique du circuit :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{vB\ell}{R}$$

Le flux magnétique à travers le circuit est, avec l'orientation choisie pour i : $\Phi(t) = BS(t)$ où $S(t) = \ell x(t)$ est la surface du circuit électrique. On remarque que :

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -vB\ell$$

c'est-à-dire $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. La loi de Faraday, valable pour des circuits fixes dans des champs magnétiques variables (induction de Neumann), fonctionne ici aussi, dans le cas de l'induction de Lorentz.

Théorème : Généralité de la loi de Faraday.

La loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

est valable quelle que soit la cause de variation de flux magnétique à travers le circuit (mouvement du circuit par rapport aux sources et/ou variations temporelles du champ magnétique).

Remarque : manifestation de la loi de modulation de Lenz

Lorsque $v > 0$, le flux magnétique à travers le circuit $\Phi(t) = BS(t)$ augmente et le courant induit est dans le sens des aiguilles d'une montre d'après l'équation électrique ($i < 0$). Il crée donc un champ magnétique suivant $-\vec{u}_z$ qui tend à faire diminuer le flux. C'est une **manifestation de la loi de Lenz**.

En pratique, le champ propre créé par une spire filiforme est négligeable devant le champ extérieur de l'aimant, nous l'avons donc négligé devant le champ extérieur.

2.2 Puissance des forces de Laplace

La barre $[AB]$ est parcourue par un courant électrique alors qu'elle est plongée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à des forces de Laplace. Dans l'expression $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ de la force élémentaire de Laplace, l'intensité i est algébrique. Pour obtenir le sens correct de la force de Laplace $\vec{F} = \int d\vec{F}$, l'intégrale doit être calculée dans le sens conventionnel de i . La résultante des actions de Laplace sur la barre est donc :

$$\vec{F} = \int_A^B i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{\ell} i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = \int_0^{\ell} -\frac{vB^2\ell}{R} dy \vec{u}_x = -\frac{vB^2\ell^2}{R} \vec{u}_x$$

Remarque : manifestation de la loi de modulation de Lenz

La force de Laplace tend donc à ralentir la barre quel que soit le signe de v . Dans les problèmes d'induction de Lorentz, **les forces de Laplace dues aux courants induits tendent à s'opposer au mouvement qui a créé ces courants induits : c'est une des manifestations de la loi de modulation de Lenz**.

Calculons la puissance mécanique fournie par la force de Laplace à la barre, dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathcal{P}_{Lap} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{vB^2\ell^2}{R} \vec{u}_x \cdot v \vec{u}_x = -\frac{v^2 B^2 \ell^2}{R}$$

Par ailleurs, calculons la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ fournie par la f.é.m. induite dans la barre au reste du circuit, en convention générateur :

$$\mathcal{P}_e = ei = \frac{e^2}{R} = \frac{v^2 B^2 \ell^2}{R}$$

Nous constatons que $\mathcal{P}_{Lap} = -\mathcal{P}_e = -ei$. Ce résultat est général pour l'induction de Lorentz.

Propriété : Puissance des forces de Laplace et induction de Lorentz.

Dans un cas d'induction de Lorentz (uniquement), la puissance mécanique des actions de Laplace induites est égale à l'opposé de la puissance électrique fournie (convention générateur) par la f.é.m. induite. C'est un exemple de conversion de puissance électromécanique :

$$\mathcal{P}_{Lap} = -\mathcal{P}_e = -ei$$

2.3 Méthode de résolution des systèmes électromécaniques couplés

Le PFD appliqué à la barre en projection sur l'axe (Ox) donne :

$$m \frac{dv}{dt} = iBl$$

On rappelle l'équation électrique :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{vBl}{R}$$

On obtient donc un système d'équations différentielles électromécaniques couplées, qu'il est ici facile de résoudre (cf. TD). Nous pouvons dégager une méthode générale de résolution de ce type de problèmes :

1. Orienter arbitrairement l'intensité i du circuit.
2. Calculer la f.é.m. induite par $e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$ ou bien $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ Cette f.é.m. est orientée dans le sens conventionnel de i .
3. En déduire le schéma électrique équivalent et l'équation électrique (qui lie i et la vitesse v du circuit).
4. Par ailleurs, exprimer les forces de Laplace subies par le circuit (elles dépendent de i).
5. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au circuit pour construire l'équation mécanique (qui lie i et v).
6. Les équations électrique et mécanique sont couplées en $i(t)$ et $v(t)$. Il ne faut pas tenter de résoudre l'une sans l'autre. En général, on peut éliminer v ou i et faire une résolution directe.

3 Principe de l'alternateur

3.1 Principe général

Un alternateur permet de convertir une puissance mécanique en puissance électrique. On le retrouve par exemple sur les vélos, où la rotation de la roue entraîne un alternateur alimentant l'éclairage ou rechargeant une batterie.

Le même principe est utilisé dans les centrales électriques :

- centrales thermiques : turbine entraînée par de la vapeur ;
- centrales nucléaires : vapeur produite par le circuit secondaire du réacteur ;
- centrales hydrauliques : turbine mise en rotation par l'écoulement de l'eau.

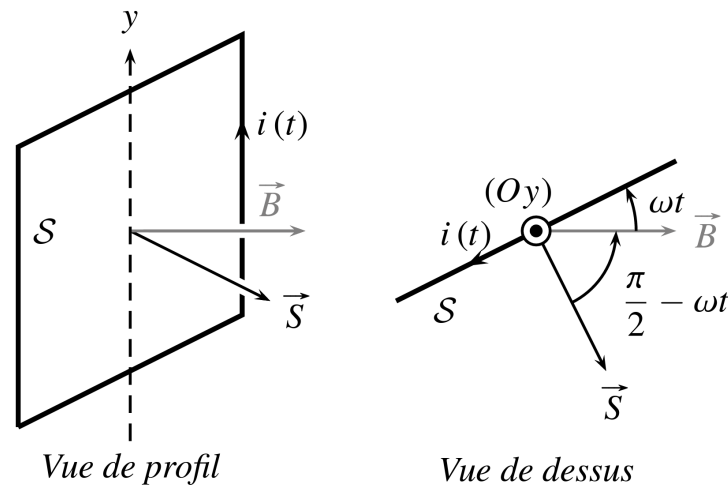


Figure 3 – Constitution simplifiée d'un alternateur

Dans toute la suite, on considère un modèle simple d'alternateur (figure 3) constitué d'une spire rectangulaire $\mathcal{S}$ de surface S et de résistance électrique R , dont l'auto-inductance est supposée négligeable.

La spire constitue le **rotor**. Elle tourne autour de l'axe (Oy) avec une vitesse angulaire constante ω . Son moment d'inertie par rapport à cet axe est noté J .

L'environnement extérieur crée un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$, perpendiculaire à l'axe (Oy) .

3.2 Interprétation physique

- La rotation de la spire dans le champ magnétique provoque une variation du flux magnétique : une f.é.m. est induite.
- La spire étant conductrice et fermée sur elle-même, un courant induit i apparaît.
- Ce courant plongé dans le champ magnétique subit des forces de Laplace dont le moment s'oppose au mouvement de rotation, conformément à la loi de Lenz.

3.3 F.é.m. induite et équation électrique

Le sens conventionnel du courant est choisi arbitrairement sur le schéma.

La règle de la main droite permet alors de fixer l'orientation du vecteur surface $\vec{S}$ associé à la spire.

L'angle entre $\vec{S}$ et $\vec{B}$ vaut :

$$\frac{\pi}{2} - \omega t$$

Le flux magnétique traversant la spire est donc :

$$\varphi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = BS \sin(\omega t)$$

Comme ce flux dépend du temps, une f.é.m. apparaît dans la spire :

$$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -BS\omega \cos(\omega t)$$

La spire possède une résistance électrique R et son auto-inductance est négligée.

La f.é.m. se comporte comme un générateur orienté dans le sens conventionnel positif du courant.

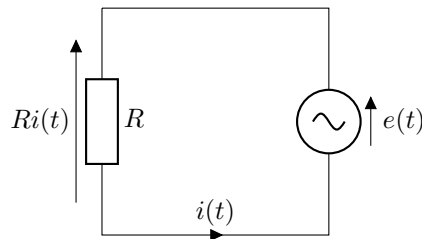


Figure 4 – Schéma équivalent de l'alternateur simplifié

L'équation électrique obtenue par la loi des mailles (figure 4) est :

$$e(t) = Ri(t)$$

On en déduit :

$$-BS\omega \cos(\omega t) = Ri(t) \quad (1)$$

3.4 Couple de Laplace et équation mécanique

Le moment résultant des forces de Laplace exercées sur la spire vaut :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$$

avec :

$$\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$$

On obtient alors :

$$\vec{\Gamma}(t) = i(t)SB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \vec{u}_y = i(t)SB \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

La rotation de la spire est entretenue par un couple extérieur :

$$\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(t) = \Gamma_{\text{ext}}(t) \vec{u}_y$$

En négligeant les frottements et en supposant ω constante, la loi du moment cinétique appliquée autour de (Oy) conduit à :

$$J \frac{d\omega}{dt}(t) = 0 = i(t)SB \cos(\omega t) + \Gamma_{\text{ext}}(t) \quad (2)$$

3.5 Couple moteur

L'équation mécanique permet d'obtenir le couple extérieur nécessaire pour maintenir la rotation :

$$\Gamma_{\text{ext}}(t) = -i(t)SB \cos(\omega t)$$

En utilisant l'équation électrique (1) :

$$\Gamma_{\text{ext}}(t) = \frac{(BS)^2}{R} \omega \cos^2(\omega t)$$

Or :

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

La valeur moyenne temporelle du couple vaut donc :

$$\langle \Gamma_{\text{ext}}(t) \rangle = \frac{(BS)^2}{2R} \omega$$

3.6 Bilan énergétique

La puissance mécanique moyenne fournie à la spire est :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{méca}} \rangle = \langle \Gamma_{\text{ext}}(t) \omega \rangle = \frac{(BS)^2}{2R} \omega^2$$

L'alternateur délivre une puissance électrique moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{élec}} \rangle = \langle Ri^2(t) \rangle$$

En utilisant l'équation électrique :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{élec}} \rangle = \frac{(BS)^2}{R} \omega^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{(BS)^2}{2R} \omega^2$$

Bilan de puissance d'un alternateur

Toute la puissance mécanique fournie à l'alternateur est convertie en puissance électrique dans ce modèle idéal sans pertes mécaniques.

On peut également remarquer que la puissance du couple des forces de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} = \vec{\Gamma}(t) \cdot \omega \vec{u}_y = i(t)SB \cos(\omega t) \omega = \left(-\frac{BS}{R} \omega \cos(\omega t) \right) SB \cos(\omega t) \omega = -\frac{(BS)^2}{R} \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

Et que la puissance fournie par la f.é.m induite est :

$$\mathcal{P}_e = e(t) \times i(t) = -BS\omega \cos(\omega t) \times \left(-\frac{BS}{R} \omega \cos(\omega t) \right) = \frac{(BS)^2}{R} \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

Propriété (rappel) : Puissance des forces de Laplace et induction de Lorentz.

Dans un cas d'induction de Lorentz (uniquement), la puissance mécanique des actions de Laplace induites est égale à l'opposé de la puissance électrique fournie (convention générateur) par la f.é.m. induite. C'est un exemple de conversion de puissance électromécanique :

$$\mathcal{P}_{Lap} = -\mathcal{P}_e = -ei$$