

Arithmétique

I Les critères de divisibilité

Pour trouver rapidement les diviseurs d'un nombre entier, certains critères de divisibilité sont à connaître :

- Un nombre est **divisible par 2**, s'il est pair (s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).
Ex : 26 ; 510 ; 1244
- Un nombre est **divisible par 4**, si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
Ex : 538924
- Un nombre est **divisible par 5**, s'il se termine par 0 ou 5.
Ex : 525 ; 1000 ; 60
- Un nombre est **divisible par 10**, s'il se termine par 0.
Ex : 10 ; 520 ; 538930
- Un nombre est **divisible par 3**, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Ex : 369 $3 + 6 + 9 = 18$ ($6 \times 3 = 18$)
- Un nombre est **divisible par 9**, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Ex : 73665 $7 + 3 + 6 + 6 + 5 = 27$ ($9 \times 3 = 27$)

Remarque : Pour trouver la liste des diviseurs d'un nombre, il faut les chercher par couple. Pour le nombre 30, on sait qu'il est :

- Divisible par 1 et 30
- Divisible par 2 et donc 15 ($2 \times 15 = 30$)
- Divisible par 3 et donc 10 ($3 \times 10 = 30$)
- Divisible par 5 et donc 6 ($5 \times 6 = 30$)

La liste des diviseurs de 30 est donc : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Application : Exercice 1

II Les nombres premiers

Définition :

Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

La liste des nombres premiers inférieurs à 30 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Remarques :

- Le liste des nombres premiers est infinie
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur
- 2 est le seul nombre premier pair

III Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique.

Exemple 1 : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Chaque facteur de cette décomposition est un **nombre premier**.

Exemple 2 : Soit la fraction $\frac{60}{126}$

Pour rendre cette fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

La décomposition de 60 en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

La décomposition de 126 en produits de facteurs premiers est : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a donc : $\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

1 est le seul diviseur commun de 10 et 21

Donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Application : Exercice 2

Arithmétique (Exercices)

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils des multiples de 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10 ?

1/ 8

2/ 45

3/ 20

4/ 8754

5/ 666

6/ 8280

Exercice 2

Décomposer en produit de facteurs premiers :

a/ 70

b/ 144

c/ 242

d/ $\frac{360}{252}$

e/ $\frac{126}{180}$

Exercice 3

Le CPE du collège a convoqué les 232 élèves de 6^{ème} en salle d'étude. Les surveillants ont disposé des sièges par rangées de 18.

1/ Combien faut-il prévoir de rangées ?

2/ Combien restera-t-il de places sur la dernière rangée ?

Exercice 4

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or qu'il partage équitablement entre les marins.

Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

Exercice 5

1/ Décomposer les nombres 6 120 et 5 712 en produit de facteurs premiers.

2/ En déduire la liste des diviseurs communs à ces deux nombres entiers.

3/ Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

4/ Simplifier la fraction $\frac{5\,712}{6\,120}$

5/ Un confiseur vient de recevoir 6 120 dragées à la violette et 5 712 galets de la Garonne. Il souhaite répartir tous les bonbons en sachets comprenant la même répartition de bonbons de deux sortes. Quel est le nombre maximal de sachets qu'il peut composer et quelle est la répartition de chaque sachet ?

Exercice 6

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs en chocolat et 2 530 poissons en chocolat. Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de manière à ce que :

- Tous les paquets aient la même composition ;
- Après mise en paquet des chocolats, il ne reste plus rien.

1/ Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.

2/ Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?