

Primitive et Intégration sur un segment

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] Quelques primitives classiques

f désigne une fonction définie et continue sur un domaine de définition et d'intégration maximal $\mathcal{D}_f$ et F une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$. Remplir le tableau.

$f(x)$	$F(x)$	$\mathcal{D}_f$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\ln \sin x $	$\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{b+x^2}}, b > 0$	$\ln(x + \sqrt{b+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2-a^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $	$\mathbb{R} - \{\pm a\}$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – Calculer – Fractions rationnelles

Déterminer une primitive réelle des fractions suivantes, en indiquant l'ensemble de validité :

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $\frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ | 4. $\frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$ |
| 2. $\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ | 5. $\frac{x + 1}{x^2 - x - 1}$ |
| 3. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ | 6. $\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ |
| | 7. $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3x + 3}$ |

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – Calculer – Polynômes trigonométriques

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------|------------------------|
| 1. $\cos^2 x$ | 3. $\sin^3 x \cos x$ |
| 2. $\cos^3 x$ | 4. $\sin^3 x \cos^2 x$ |

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – Calculer – Changements de variables

- Calculer $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ par changement de variable $u = \ln t$.
- Déterminer une primitive de $\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$.
- Déterminer une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- a) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$
 b) En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2+t}}$

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] – Calculer – Mobiliser –

Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée sans calculer l'intégrale :

- $g(x) = \int_{2x}^{x^2} e^t dt$
- $g(x) = \int_0^{2x} x t^n dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t+x) dt$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Chercher –

Déterminer les limites des suites de termes généraux ci-dessous

- $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Chercher –

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple en $n \rightarrow +\infty$ de

- $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$
- $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Calculer – Chercher – Approximation par la méthode des rectangles ☆☆

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{On pose } I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I_n \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{où } M = \sup_{[a;b]} |f'|$$

- Application : déterminer un nombre à un chiffre après la virgule qui soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 0,1 près.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Calculer – Chercher –

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+t} dt$ ☆ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(nt) t^n dt$ | <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) dt$ ☆☆ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$ ☆☆☆ |
|---|--|

Intégrale généralisée

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Calculer – Cours – Étudier la convergence et calculer si possible les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{- t } dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$ | <ol style="list-style-type: none"> $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ $\int_0^1 \ln(t) dt$ $\int_0^{+\infty} \ln(t) dt$ |
|---|--|

EXERCICE 11: [Indications] [Correction]

Changement de variable et IPP

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx ; n \in \mathbb{N}^*$ ☆ $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$ ☆ | <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$ $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ ☆☆☆ |
|--|---|

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Chercher – Mobiliser – Déterminer la nature des intégrales impropres ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \sin x dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dt$ | <ol style="list-style-type: none"> $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^3(x)}{e^x} dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \cos x dx$ $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x dx$ |
|--|--|

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer – ☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}$$

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer. (On pourra penser à faire un changement de variable $t = 1/u$.)

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer – ☆

En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, calculer $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ (et J).

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Chercher – Mobiliser – Calculer –

Déterminer

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{x^2}^x \frac{1}{t} dt$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t} dt$ ☆

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2} dt$ ☆☆

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Mobiliser – Chercher – Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

2. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

3. En cas de convergence, encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f .

4. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction]

Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge

2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3. $\frac{5}{4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ Remarque : en réalité, cette somme vaut $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,645$.

Indications

Exercice 2 [Correction]

2. Application directe d'une formule usuelle.

3. On cherche à exprimer la fonction sous la forme $\frac{1}{1 \pm u^2}$.

4. On cherche à décomposer sous la forme d'intégrales connues :

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2} = \frac{u'}{u} + \frac{c}{u}$$

Exercice 4 [Correction]

3. On posera le changement de variable $u = \sin t$.

4. a) On pourra poser un changement de variable affine $x = au+b$ transformant $\cos(x)$ en $\sin(u)$.

Exercice 5 [Correction]

1. Écrire $g(x) = F(2x) - F(x^2)$.

3. Faire un changement de variable pour se débarrasser du x dans l'intégrale et se ramener ensuite à la même technique que dans la question 1.

Exercice 8 [Correction]

2. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Exercice 9 [Correction]

1. Majorer le terme contenu dans l'intégrale avec une suite (indépendante de t mais dépendante de n) et se servir de cette majoration pour majorer l'intégrale.

2. Majorer la fonction contenue dans l'intégrale par une autre fonction facilement intégrable (mais dépendant encore de n !)

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$
c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) - 1 \right) dt = 0$$

On pensera à utiliser l'égalité des accroissements finis.

4. Chercher, pour x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ puis utiliser la formule des accroissements finis.

Exercice 11 [Correction]

1. Deux problèmes. On peut essayer une intégration par partie.
 2. Deux problèmes. On peut essayer une intégration par partie.
 3. Chercher une relation entre I_n et I_{n-1} . En déduire I_n
 4. On peut essayer une intégration par partie.
 6. On fera en sorte de transformer le numérateur en un polynôme par changement de variable.
 8. Écrire $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$. Poser, dans la première intégrale, $u = t^2$. Pour conclure, utiliser le théorème des gendarmes.
-

Exercice 12 [Correction]

8. On pourra par exemple penser que $\ln x \leq x$
-

Exercice 13 [Correction]

On pourra effectuer le changement de variable $v = \frac{1}{u}$.

Exercice 14 [Correction]

Effectuer un changement de variable affine permettant de transformer $\cos$ en $\sin$.

Exercice 15 [Correction]

2. Remarquer que l'intégrale $\int_0^x \frac{\tan t}{t}$ est faussement impropre.
3. On pourra tenter d'encadrer la fonction $\frac{\tan t}{t^2}$ de la manière la plus optimale possible grâce au théorème des accroissements finis.

Exercice 2

1. • Etape 1 : simplification

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x + 2}{x - 1} &= \frac{x(x - 1 + 1) + x + 2}{x - 1} = x + \frac{2x + 2}{x - 1} \\ &= x + \frac{2(x - 1 + 1) + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{4}{x - 1}\end{aligned}$$

• Etape 2 : calcul

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln |x - 1| \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

2. Comme $x^2 - x + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, que ce polynôme est toujours strictement positif et que l'on a une forme $\frac{u'}{u}$, on a

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \ln |x^2 - x + 1| = \ln(x^2 - x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. On a

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

Par changement de variable $u = t - 1$, ($du = dx$) on obtient D'où

$$\int^x \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt = \int^{x-1} \frac{1}{1 + u^2} du = \arctan(x - 1)$$

4. • Etape 1 : simplification

$$\frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{2x - 2}^{u'}}{\underbrace{x^2 - 2x + 2}_u} + \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$$

• Etape 1 : calcul

$$\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} = \ln |x^2 - 2x + 2| + C = \ln(x^2 - 2x + 2) + C$$

et

$$\int \frac{2}{x^2 - 2x + 2} = 2 \arctan(x - 1) + C' \quad (\text{question précédente})$$

De plus, comme $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x + 2| + 2 \arctan(x - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{x + 1}{x^2 - x - 1} &= \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^2 - x - 1} + \frac{1}{x^2 - x - 1} \quad \text{D'où} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1} + \frac{3/2}{x^2 - x - 1}}{x^2 - x - 1}\end{aligned}$$

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 - x - 1} dx$$

Or, $x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ D'où

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{x^2 - x - 1} &= - \int^{x-1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} - u^2} \quad u = x - \frac{1}{2} \\ &= - \frac{1}{2 \times \sqrt{\frac{5}{4}}} \ln \left| \frac{u + \sqrt{\frac{5}{4}}}{u - \sqrt{\frac{5}{4}}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right|\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right| \quad \forall x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

6. • Etape 1 : simplification

Tout d'abord

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 + \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

ensuite,

$$\frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 2 - 2) - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{3}{x^2 + 2x + 1}$$

• Etape 2 : calcul :

$$\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 1| - 3 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Or, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, d'où

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = -\frac{1}{x + 1}$$

et de plus, $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 1| = \ln |x + 1|$.

En conclusion,

$$\boxed{\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = x + \ln |x + 1| + \frac{3}{x + 1} \quad \forall x \neq -1}$$

$$7. \quad \boxed{\int \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3x + 3} dx = 2x - 3 \ln(\underbrace{x^2 + 3x + 3}_{>0}) + \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 3}{\sqrt{3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3

$$1. \quad \int \cos^2 x :$$

• méthode 1 : par PPP :

$$\int^x \cos t \cos t dt$$

$$\begin{aligned} u &= \cos t & u' &= -\sin t \\ v' &= \cos t & v &= \sin t \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int^x \cos^2 t dt &= [\cos t \sin t]^x + \int^x \sin t \sin t dt \\ &= \cos x \sin x + \int^x 1 - \cos^2 t dt \\ &= \cos x \sin x + x - \int^x \cos^2 t dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\int \cos^2 x dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2}}$$

• méthode 2 : par linéarisation :

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

D'où

$$\boxed{\int \cos^2 x dx = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} = \frac{\cos x \sin x + x}{2}}$$

$$2. \quad \int \cos^3 x :$$

• Méthode 1 : par linéarisation

On utilise $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. On obtient

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x))$$

D'où

$$\boxed{\int \cos^3 x dx = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x}$$

• Méthode 2 : par PPP

$$\boxed{\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3} (\cos(x)^2 \sin(x) + 2 \sin(x))}$$

3. $\int \sin^3 x \cos x :$

- Méthode 1 : par linéarisation

$$\sin^3 x \cos x = \frac{1}{8} (-2 \sin 4x + \sin 2x)$$

D'où

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x$$

- Méthode 2 : par formule usuelle

$$\sin^3 x \cos x = u^3 u' \quad \text{où } u = \sin x$$

D'où

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left[\frac{u^4}{4} \right] = \frac{\sin^4 x}{4}$$

4. $\int \sin^3 x \cos^2 x :$

- Méthode 1 : par linéarisation

$$\sin^3 x \cos^2 x = \frac{1}{16} (-2 \sin 5x + 2 \sin x + \sin 3x)$$

D'où

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \frac{1}{80} \cos 5x - \frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{48} \cos 3x$$

- Méthode 2 : par PPP

$$\begin{aligned} u &= \sin^2 x & u' &= 2 \sin x \cos x \\ v' &= \sin x \cos^2 x & v &= -\frac{1}{3} \cos^3 x \end{aligned}$$

D'où

$$\int \sin^3 x \cos x dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos^3 x + \frac{2}{3} \int \underbrace{\sin x \cos^4 x}_{-\frac{1}{5} w' w} dx$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos^3 x - \frac{2}{15} \cos^5 x$$

Exercice 4

1. On pose $u = \ln t$. u est $\mathcal{C}^1$ et bijective sur $[1, e]$. On a

$$t = e^u$$

d'où

$$dt = e^u du$$

et

x	1	e
u	0	1

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

D'où

$$\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

2. On pose $u = \sqrt{t}$ où $\sqrt{\cdot}$ est une fonction bijective et $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
On a

$$dt = 2u du$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} &= \int^{\sqrt{t}} \frac{1}{u + u^3} 2u du \\ &= \int^{\sqrt{t}} \frac{2}{1 + u^2} du \\ &= 2 \arctan \sqrt{t} \end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = 2 \arctan \sqrt{t}$$

3. On pose $u = \sin t$ qui est une fonction bijective et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

On a

$$du = \cos x \, dx$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, du \\ &= \int^{\sin t} \frac{1}{1 - \sin^2(x)} \, du \\ &= \int^{\sin t} \frac{1}{1 - u^2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int^{\sin t} \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right|}$$

4. a) par changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$, on trouve

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \, dt$$

Ensuite, il suffit de sommer ces deux quantités pour obtenir le résultat.

- b) Changement de variable $t = \sin x$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \, dt = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} 1. \quad g(x) &= \int_{2x}^{x^2} e^t \, dt \\ &= \int_{2x}^0 e^t \, dt + \int_0^{x^2} e^t \, dt \\ &= -\int_0^{2x} e^t \, dt + \int_0^{x^2} e^t \, dt \end{aligned}$$

Maintenant, ce sont des compositions de fonctions. En effet, si on note F une primitive de la fonction $\exp$:

$$F(x) = \int_0^x e^t \, dt$$

on a

$$g(x) = -F(2x) + F(x^2)$$

par somme et compositions de fonctions $\mathcal{C}^1$, g est donc $\mathcal{C}^1$.

De plus, on a

$$\boxed{\begin{aligned} g'(x) &= -2F'(2x) + 2xF'(x^2) \\ &= -2e^{2x} + 2xe^{x^2} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad g(x) &= \int_0^x x t^n \, dt \quad \text{Maintenant, ce sont des multiplications de fonctions.} \\ &= x \int_0^x t^n \, dt \end{aligned}$$

En effet, si on note F une primitive de la fonction $t \mapsto t^n$:

$$F(x) = \int_0^x t^n \, dt$$

on a

$$g(x) = xF(x)$$

par multiplications de fonctions $\mathcal{C}^1$, g est donc $\mathcal{C}^1$.

De plus, on a

$$\boxed{\begin{aligned} g'(x) &= F(x) + xF'(x) \\ &= x^n + nx^n = (n+1)x^{n+1} \end{aligned}}$$

3. Il faut se débarrasser du x dans l'intégrale !
On fait un changement de variable...

$$u = t + x$$

ça donne

$$g(x) = \int_0^x f(t+x) dt = \int_x^{2x} f(u) du$$

Alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{2x} f(u) du \\ &= \int_x^0 f(u) du + \int_0^{2x} f(u) du \\ &= -\int_0^x f(u) du + \int_0^{2x} f(u) du \end{aligned}$$

Si

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

on a

$$g(x) = -F(x) + F(2x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -F'(x) + 2F'(2x) \\ &= -f(x) + 2f(2x) \end{aligned}$$

Exercice 6

Rappel : la formule de Riemann : Si f est une fonction continue sur $[0; 1]$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

de même

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

1. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \sqrt{3} - 1 \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}.$

Exercice 7

$$1. \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n\sqrt{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{t} dt}.$$

$$\text{Or, } \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}, \text{ D'où}$$

$$\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}}$$

$$2. \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{2k}{n}\right)^3}.$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{(1+x)^3} dt$$

$$\text{Or, } \int_0^2 \frac{1}{(1+x)^3} dt = \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^2 = \frac{1}{3}, \text{ D'où}$$

$$\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}}$$

Exercice 8

1. On note $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n} \quad \forall k = 0 \dots n-1$, de manière à avoir

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt - I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \end{aligned}$$

Or, par théorème des accroissements finis, on a

$$\forall t \in [x_k; x_{k+1}], \quad |f(t) - f(x_k)| \leq (x - x_k) \sup_{u \in [x_k; x_{k+1}]} |f'(u)| \leq M$$

En réinjectant dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t) dt - I_n \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k) M dt \\
&= M \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(x - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} dt \\
&= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\
&= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&= M \cdot n \cdot \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&= M \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

C'est fini!

2. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$. On pose alors f la fonction inverse et on a

$$\ln 2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq M \frac{1}{2n} \quad \text{où } M = \sup_{[a;b]} |f'|$$

or, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, d'où

$$M = 1.$$

i.e.

$$\ln 2 - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}}_{I_n} \leq \frac{1}{2n}$$

On souhaite une valeur approchée à 0,1 près. Commençons par chercher n tel que

$$\frac{1}{2n} \leq 0,1$$

ce qui donne

$$n \geq 5$$

Une valeur approchée de $\ln 2$ à 0,1 près est donc

$$\begin{aligned}
\ln 2 &\simeq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \frac{1}{1 + \frac{k}{5}} \\
&\simeq \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} + \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} \right) \\
&\simeq \frac{1}{5} \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \right) \\
&\simeq \frac{1879}{2520} \simeq 0,7456
\end{aligned}$$

mais **cette valeur n'est pas exacte**. Il faut encore approximer l'approximation! *Comment être alors certain que l'on ne rogne pas sur la précision?* Et bien, il faut être plus fin dans le raisonnement.

On sait donc avec certitude que

$$\ln 2 \in \left[\frac{1879}{2520} - 0,1; \frac{1879}{2520} + 0,1 \right] \simeq [0,646, 0,846]$$

mais attention, n'importe quelle valeur dans cet intervalle n'est qu'une approximation à 0,2 près!. Pour être certain d'avoir une approximation à 0,1 près, il faut obtenir une valeur I_n telle que

$$\ln 2 \in [I_n - 0,05, I_n + 0,05]$$

autrement dit, il va falloir

$$\frac{1}{2n} \leq 0,05$$

et donc

$$n \geq 10$$

le valeur de I_n sera donc, pour $n = 10$

$$I_n = \frac{33\,464\,927}{46\,558\,512} \simeq 0,719$$

Une valeur à 0,1 près de $\ln 2$ sera donc n'importe quelle valeur dans $[I_n - 0,05; I_n + 0,05]$, c'est-à-dire, ici,

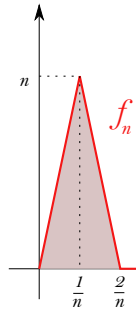
$$\boxed{\ln 2 \simeq 0,7}$$

Remarque : Vraie valeur de $\ln 2$:

$$\ln 2 \simeq 0,693147 \dots$$

Exercice 9

Attention, on ne peut pas intervertir sans réfléchir les intégrales et les limites. Par exemple, prenons la suite de fonctions f_n déterminées comme sur le graphique suivant



On voit que :

$$\star \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\star \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

1. Si $t \in [0; 1/2]$, on a

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où, par passage à l'intégrale, on trouve

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

2. Si $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$|\cos(nt)t^n| \leq t^n$$

D'où, par passage à l'intégrale, on trouve

$$\left| \int_0^1 \cos(nt)t^n dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(nt)t^n dt = 0$$

3. On rappelle que d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos X = \cos 0 - X \sin c_X$$

D'où

$$\left| \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{\sin t}{n} \right| |\sin c_t| \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \left| \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) - 1 \right| dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n} dt = \frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) dt = \frac{\pi}{2}$$

4. Tout d'abord

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Ensuite, on veut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right) dt = 0$$

Or, par égalité des accroissements finis appliquée à $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, on trouve

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{1}{n+c}$$

puis

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x &= e^{x \frac{n}{n+c}} - e^x \\ &= e^{x \frac{n+c-c}{n+c}} - e^x \\ &= e^{x - x \frac{c}{n+c}} - e^x \\ &= e^x \left(e^{-x \frac{c}{n+c}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Or, si $x \in [0; 1]$, on a

$$e^{-\frac{c}{n+c}} \leq e^{-x \frac{c}{n+c}} \leq 1$$

D'où

$$\int_0^1 e^x e^{-x \frac{c}{n+c}} dx \leq \int_0^1 \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right) dt \leq \int_0^1 0 dx$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

Exercice 10

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ est continue sur $[0, \infty[$. Il y a donc un point critique en $+\infty$.
Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &= [\arctan t]_0^x \\ &= \arctan x - \arctan 0 = \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}}$$

2. Pb en $+\infty$. D'après le cours, $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$.
3. Pb en $\pm\infty$. la fonction est impaire et $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t|} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 0$.

4. On pose

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

f est continue sur $]0; +\infty[$. On constate donc deux problème d'intégration.

On observe une forme $u'u$. La forme est donc calculable avec

$$\int f(x) dx = e^{-\frac{1}{x}}$$

- En $+\infty$:

$$\int_1^b f(x) dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} \right]_1^b = e^{-\frac{1}{b}} - e^{-1} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1}$$

- En 0 :

$$\int_a^1 f(x) dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} \right]_a^1 = e^{-1} - e^{-\frac{1}{a}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} e^{-1}$$

Les deux intégrales étant convergente, par relation de Chasles, l'intégrale de départ est convergente et de plus,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = 1}$$

5. Pb en $+\infty$. En revenant à la définition, elle diverge :

$$\int \frac{\ln(t)}{t} dt = \int \frac{1}{2} 2 u' u dt = \frac{1}{2} u^2$$

6. D'après la question précédente, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge. Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

7. Pb en 0. Converge en revenant à la définition $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$

8. Pb en 0 et en $+\infty$. Converge en 0. Voyons ce qui se passe en $+\infty$.
Observons que $\ln t \geq 1$ pour tout $t \geq e$. Or, l'intégrale $\int_e^{+\infty} 1 dt$ est divergente. Par théorème de comparaison des intégrales, on note alors que $\int_e^{+\infty} \ln t dt$ diverge.

Exercice 11

1. La fonction est continue sur $]0; +\infty[$. Elle n'est pas faussement impropre en 0.

On fait une intégration par partie.

$$\begin{array}{ll} u = \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) & u' = -\frac{2}{t+t^3} \\ v' = 1 & v = t \end{array}$$

où u, v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrons que $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge :

$$\begin{aligned} [u(t)v(t)]_a^b &= t \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \\ &= t \ln \frac{1}{t^2} (t^2 + 1) \\ &= 2t \ln t + t \ln(1 + t^2) \end{aligned}$$

En $t \rightarrow 0$:

le tout tend vers 0 par croissance comparée.

En $t \rightarrow +\infty$,

$$t \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \sim \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Ainsi,

$$[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = 0$$

- Comme $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge, l'intégrale est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt$$

qui converge (passage par arctan, à faire...) et

$$\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \underbrace{\left[t \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \right]_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt = \pi$$

2. On observe 2 problèmes. En 0 et 1.

- Étude en 0. On observe que

$$\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 0.

- Étude en 1.

$$\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 1} -\infty$$

Non prolongeable par continuité, il faut trouver une autre solution. On peut essayer une intégration par partie.

$$\begin{array}{ll} u = \ln(1-t^2) & u' = -\frac{2t}{1-t^2} \\ v' = \frac{1}{t^2} & v = -\frac{1}{t} \end{array}$$

L'intégrale est donc de même nature que

$$\int_0^1 \frac{2}{1-t^2} dt$$

(qui est clairement convergente en 0 car bien définie et continue) Cette intégrale est calculable car celle d'une fraction rationnelle. On connaît d'ailleurs une primitive qui est

$$\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

Vient de

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

D'où

$$\int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$$

L'intégrale est donc divergente.

3. Pour $\boxed{n \geq 2}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(x^2+1)^n} dx}_{I_{n-1}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx}_{\frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \text{ par ipp}}$$

l'ipp est

$$\begin{aligned} u &= x & u' &= 1 \\ v' &= \frac{x}{(x^2+1)^n} = x(1+x^2)^{-n} & v &= \frac{1}{2(-n+1)} \frac{1}{(x^2+1)^{-n+1}} \end{aligned}$$

(cette ipp ne fonctionne pas si $n = 1$!)

On a

$$I_n = \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} \quad \forall n \geq 2$$

• Calcul de I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} I_{n-1} \\ &= \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)} I_{n-2} \\ &= \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)} \dots \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} I_1 \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{2^{n-1}(n-1)!} I_1 \end{aligned}$$

Or, $I_1 = \frac{\pi}{2}$. de plus,

$$(2n-3)(2n-5)\dots 1 = \frac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)\dots 1}{(2n-4)(2n-6)\dots 2} = \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}$$

D'où

$$\boxed{I_n = \frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!} \pi}$$

4. La fonction $x \mapsto \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Il y a donc un problème en $+\infty$.

Effectuons une IPP.

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & u' &= \frac{1}{1+x^2} \\ v' &= \frac{x}{(1+x^2)^2} & v &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

où u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

• Étude de $[uv]_0^{+\infty}$:

Comme $\arctan$ est bornée,

$$u(x)v(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

• Comme $[uv]_0^{+\infty}$ converge, l'intégrale est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

On utilise ensuite la question précédente, ou alors on recalcule avec une IPP.

On en déduit que On obtient $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8}$

5. La fonction est continue sur $[0; +\infty[$. Il y a un problème en $+\infty$.

Grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$, on trouve $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt =$

$$2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = 12 \text{ (d'après le cours.)}$$

6. $f : t \mapsto \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ est continue sur $]0, 1[$. On a donc a priori un problème de convergence en 1.

- Voyons si la forme est faussement impropre :

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} +\infty$$

La forme est donc réellement impropre en 1.

- Étude en 1 :

Ne reconnaissant pas de formule usuelle, tentons un changement de variable.

On pose $t = u^2$, $dt = 2u du$.

D'où

$$\int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt = 2 \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \left(\int_0^x \frac{u^2-1}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \right)$$

Ensuite,

$$\int_0^x \frac{u^2-1}{\sqrt{1-u^2}} du = - \int_0^x \sqrt{1-u^2} du$$

$$u = \sin t \quad du = \cos t dt \quad \text{d'où} \quad \int_0^{\arcsin x} \sqrt{1-u^2} du = \int_0^{\arcsin x} \cos^2 t dt$$

$$\text{puis } \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} \text{ donne}$$

$$\int_0^x \sqrt{1-u^2} du = \frac{\pi}{4}$$

Par formule usuelle,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{2}$$

En conclusion, on a

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt = \frac{\pi}{2}$$

7. Changement de variable $u = e^x$ $du = e^x dx = u dx$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)(\frac{1}{u}+1)} \frac{1}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2} du = \frac{1}{2}$$

(C'est une forme habituelle $\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}$).

8. Problème en 0 et 1.

La fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0, x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$$

Dans la première intégrale, on pose

$$u = t^2$$

et on obtient

$$\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$$

et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

On note alors que, puisque $x \in]0, 1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t \ln t < 0$ et donc

$$\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{\ln t} t$$

puis par croissance de l'intégrale,

$$\int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln t} dt$$

et donc

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0, 1[$,

$$x^2 \ln 2 \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \leq x \ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$$

Exercice 12

1. fonction prolongeable en 0 par $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \sin x = 0$.
2. Problème en $\pm\infty$, mais la fonction est paire. On peut donc étudier seulement le cas $+\infty$.

$$0 \leq \frac{1}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

Or, e^{-x} est le terme général d'une intégrale convergente, ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{converge}$$

3. Problème en $+\infty$ et 0.

- En 0, la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ est prolongeable par continuité car

$$e^x - e^{-x} = 2x + o(x)$$

d'où

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} \sim \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

l'intégrale est donc faussement impropre en 0.

- En $+\infty$,

$$e^x - e^{-x} \sim e^x$$

d'où,

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} \sim x e^{-x} \quad (\text{intégrable})$$

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx$ converge.

4. Pour la convergence, pb en 0 et $+\infty$.

- Première possibilité de démonstration : En 0 :

On a

$$e^x - e^{-x} \sim_0 2x \quad (\text{par DL}), \quad e^x + e^{-x} \sim 2$$

d'où

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \sim \frac{1}{2x} \geq 0 \quad \text{terme général d'une intégrale divergente.}$$

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dt$ diverge en 0, donc diverge.

- Deuxième possibilité : en $+\infty$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \geq \frac{e^x}{e^x} = 1 \quad \text{terme général d'une intégrale divergente.}$$

ce qui donne une autre manière de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dt$ diverge.

5. Problème en $\pm\infty$ et 0.

• En $\pm\infty$:

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{terme général d'une intégrale convergente en } \pm\infty$$

D'où la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x^2} dx$

• En 0^+ :

★ Méthode 1 : par accroissements finis, on sait qu'il existe $c \in]0; x[$,

$$\sin x = x \cos c \quad \forall x \geq 0$$

D'où, pour $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{2x} \geq 0$$

Or, $\frac{1}{2x}$ est le terme général d'une intégrale divergente en 0. Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales positives, on obtient que

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x^2} dx$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ diverge.

★ Méthode 2 : Même type de raisonnement, sauf que nous n'utiliserons pas le théorème des accroissements finis, mais les équivalents :

on a

$$\frac{\sin x}{x} \sim_0 \frac{1}{x}$$

pour x assez proche de 0, on a donc

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{2x} \geq 0 \quad \frac{1}{2x} \text{ terme général d'une intégrale divergente en } 0$$

De la même manière, pour α assez petit, L'intégrale $\int_0^\alpha \frac{\sin x}{x^2} dx$ et donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ diverge.

6. Seul problème en $+\infty$:

$$\left| \frac{\cos^3(x)}{e^x} \right| \leq e^{-x}$$

il y a donc convergence absolue, donc convergence.

7. ★ Méthode 1 : En 0

$$\frac{e^{-x}}{x} \cos x \sim_0 \frac{1}{x}$$

D'où, pour x positif assez petit on a

$$\frac{e^{-x}}{x} \cos x \geq \frac{1}{2x}$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{x} ds$ diverge (à faire) IL y a donc divergence en 0, donc divergence.

★ Méthode 2 : On étudie $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} x dx$. Or, pour $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on a

$$\cos x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$$

et $\exp$ croissante, d'où

$$\frac{e^{-x}}{x} \cos x \geq \underbrace{e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}}_c \frac{1}{x}$$

puis même chose qu'en méthode 1.

8. • Problème en $+\infty$: possible changement de variable

$$u = x^2 \quad du = 2\sqrt{u}dx$$

d'où

$$\int_1^b e^{-x^2} \ln x \, dx = \int_1^{b^2} e^{-u} \frac{\ln \sqrt{u}}{2\sqrt{u}} \, du$$

Or, de manière générale, on a

$$\frac{\ln x}{x} \leq 1 \quad \forall x > 0$$

d'où

$$0 \leq e^{-u} \frac{\ln \sqrt{u}}{2\sqrt{u}} \leq \frac{e^{-u}}{2} \quad \forall u \geq 1$$

par comparaison d'intégrales positives convergentes, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \ln x \, dx \quad \text{converge}$$

- Problème en 0 :

On note que sur $[0; 1]$, on a

$$\ln x \leq 0$$

Si on veut montrer la convergence en faisant une comparaison, il faut donc minorer le terme général. Or, sur $[0; 1]$, on a

$$e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0 = 1$$

d'où, comme $\ln x \leq 0$,

$$0 \geq e^{-1} \ln x \geq e^{-x^2} \ln x \geq \ln x$$

Or, par Ipp, on trouve que

$$\int_0^1 \ln t \, dt \quad \text{converge}$$

d'où la convergence de

$$\int_0^1 e^{-1} \ln t \, dt$$

et celle de $\int_0^1 e^{-x^2} \ln x \, dx$

- Conclusion : il y a convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x \, dx$

Exercice 13

$I = J$ par changement $u \mapsto 1/u$.

$$I + J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14

- Existence de I :

La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, quand x tend vers 0,

$$\sin x \sim x$$

d'où

$$\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$$

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \ln(\sin x) \leq \ln x \quad \underbrace{\leq}_{\text{si } x \leq 1} 0$$

Or, $\int_0^1 \ln\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$ existe, par suite, f est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Existence de J et $I = J$:

Le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$ fournit J existe et

$$J = I$$

- Calcul de I :

Par suite,

$$\begin{aligned} 2I &= I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) \, dx \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) \, dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) \, du \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) \, du \right) \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) \, (-dt) \right) = -\frac{\pi \ln 2}{2} + I. \end{aligned}$$

D'où

$$I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

Exercice 15

1. Par calcul d'intégrale, on obtient simplement :

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{t} dt = [\ln |x|]_{x^2}^x = \ln \frac{1}{|x|}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{x^2}^x \frac{1}{t} dt = +\infty$$

2. Pour $t \in [0; \frac{\pi}{4}]$, le seul problème de continuité la fonction $\frac{\tan t}{t}$ se trouve en $t = 0$. Or,

$$\tan t \sim_0 t$$

la fonction $t \in]0; \frac{\pi}{4}] \mapsto \frac{\tan t}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0. Autrement dit, l'intégrale $\int_0^X \frac{\tan t}{t} dt$ est faussement impropre et $\int_0^X \frac{\tan t}{t} dt$ existe pour tout X proche de 0.

Alors, on a

$$\int_x^{3x} \frac{\tan t}{t} dt = \underbrace{\int_x^0 \frac{\tan t}{t} dt}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_0^{3x} \frac{\tan t}{t} dt}_{\rightarrow 0}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t} dt = 0$$

3. Cette fois ci, la fonction n'est plus prolongeable par continuité en 0. Il faut donc trouver une autre stratégie.

Grâce au théorème des accroissements finis appliqué à $\tan$ entre 0 et $t > 0$, il existe $c \in [0, t]$ tel que

$$\frac{\tan t}{t^2} = \frac{1}{t \cos^2 c}$$

ainsi, si $t \in [x; 3x]$, on a $c \in [0; 3x]$ puis

$$\frac{1}{t} \leq \frac{\tan t}{t^2} \leq \frac{1}{t \cos^2 x}$$

par passage à l'intégrale, on trouve

$$\underbrace{\int_x^{3x} \frac{1}{t} dx}_{\ln 3} \leq \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2} dx \leq \underbrace{\int_x^{3x} \frac{1}{t \cos^2 x} dx}_{\frac{\ln 3}{\cos^2 x}}$$

par théorème des gendarmes, on aura

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2} dt = \ln 3$$

Exercice 16

1. Repose simplement sur

$$f(t) \leq f(k) \quad \text{si } t \geq k$$

et

$$f(t) \geq f(k) \quad \text{si } t \leq k$$

par décroissance de f .

2. On constate, en additionnant les termes k allant de 1 à m dans la question précédente, que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{m+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^m f(k) \leq \int_0^m f(t) dt$$

- Ainsi, si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ converge, comme elle est positive, elle est majorée par sa limite, d'où

$$\int_1^{m+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^m f(k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

On a donc affaire à une intégrale croissante et majorée, donc convergente.

- Si l'intégrale est convergente, le même type d'argument vaut pour l'inégalité de droite et donne la convergence de la somme.
3. En utilisant le même type de raisonnement que dans la question précédente, on trouve

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(t) dt$$

4. D'après les question précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$

$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Or,

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

D'où

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Exercice 17

1. Si $x \in [n; n+1]$, alors

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

d'où

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

Par relation de Chasles, ceci nous donne

$$\ln(N+1) = \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

Par comparaison de limites, on trouve

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$$

2. Si $x \in [n; n+1]$, alors

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Par relation de Chasles, ceci nous donne, en utilisant l'inégalité de droite :

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \quad (*_1)$$

puis, en utilisant l'inégalité de gauche :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Autrement dit, par changement d'indice,

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (*_2)$$

- Si $\alpha = 1$, c'est la question 1.

- Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_0^X = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)X^{\alpha-1}}$$

qui admet une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha - 1 > 0$.

Dans $(*_1)$, on obtient donc la divergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha < 1$.

Dans $(*_2)$, on obtient donc la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha > 1$.

3. • Inégalité de gauche :

C'est une série à terme positifs, elle est donc supérieure à la somme de ses deux premiers termes : $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

- Inégalité de droite :

Dans $(*_2)$, par passage à la limite, on trouve

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 = 2$$