

Objectifs du chapitre

- Connaître la définition de la transformée de Laplace et ses conditions d'existence.
- Utiliser le tableau des transformées usuelles (échelon, impulsion, exponentielle, sinusoïdes).
- Appliquer les propriétés fondamentales : linéarité, décalage temporel et fréquentiel, dérivation, intégration.
- Utiliser les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.
- Définir et calculer la fonction de transfert $H(s) = S(s)/E(s)$ d'un système linéaire.
- Déterminer les pôles et zéros d'une fonction de transfert et en déduire la stabilité du système.
- Effectuer une décomposition en éléments simples pour calculer la transformée de Laplace inverse.
- Résoudre une équation différentielle par la méthode de Laplace et analyser la réponse indicielle d'un système du 1er et du 2e ordre.

Situation professionnelle

Contexte : Un ingénieur en automatisme chez un fabricant de systèmes de régulation thermique industrielle doit analyser le comportement d'une boucle de régulation contrôlant la température d'un four de traitement thermique. La consigne passe en échelon de 50 °C à 200 °C.

Pour prédire le dépassement, le temps de réponse et la stabilité du système, il modélise le four comme un système du 2e ordre avec :

- Une pulsation propre $\omega_n = 0,5$ rad/s
- Un facteur d'amortissement $\xi = 0,4$ (régime sous-amorti)
- Un gain statique $K = 1$

Il utilise la transformée de Laplace pour passer du domaine temporel (équations différentielles complexes) au domaine fréquentiel (algèbre des fonctions de transfert), ce qui simplifie considérablement l'analyse.

Questions : Quelle sera la réponse en température $T(t)$ après l'application de l'échelon ? Y aura-t-il un dépassement ? Le système est-il stable ? Quelle est la valeur finale ?

1. Définitions fondamentales

DÉFINITION

Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction causale (nulle pour $t < 0$). Sa **transformée de Laplace** est l'intégrale :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

où s est une variable complexe. On note de façon équivalente :

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

DÉFINITION

Variable complexe s

La variable $s = \sigma + j\omega$ est une variable complexe ($j^2 = -1$) :

- $\sigma = \text{Re}(s)$: partie réelle — liée à l'amortissement
- $\omega = \text{Im}(s)$: partie imaginaire — liée à la fréquence
- Le plan complexe (σ, ω) est appelé **plan de Laplace** ou **plan complexe s**

DÉFINITION

Conditions d'existence (convergence)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ converge si $\text{Re}(s) > \sigma_0$, où σ_0 est l'**abscisse de convergence**.

En pratique pour les BTS, toutes les fonctions physiques rencontrées (croissance au plus exponentielle) admettent une transformée de Laplace.

DÉFINITION

Transformée de Laplace inverse

L'opération inverse est notée \mathcal{L}^{-1} :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

En pratique, on ne calcule pas l'intégrale inverse directement. On utilise une **décomposition en éléments simples** de $F(s)$, puis on lit le tableau des transformées usuelles.

2. Tableau des transformées usuelles

Ce tableau est fondamental. On suppose les conditions initiales nulles et $t \geq 0$ pour toutes les fonctions.

Nom	Fonction temporelle $f(t)$	Transformée $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
Échelon unité	$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
Rampe linéaire	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Monôme	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponentielle décroissante	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
Cosinus	$\cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
Sinus	$\sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
Exp × cosinus (oscillations amorties)	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
Exp × sinus (oscillations amorties)	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
Exp × rampe (pôle double)	$t e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

EXEMPLE 1 — CALCUL À PARTIR DE LA DÉFINITION

Calculer $\mathcal{L}\{e^{-3t} \cdot u(t)\}$ directement.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+3)t} dt = \left[\frac{e^{-(s+3)t}}{-(s+3)} \right]_0^{+\infty}$$

Pour $\operatorname{Re}(s) > -3$, le terme en $+\infty$ vaut 0, donc :

$$F(s) = 0 - \frac{1}{-(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

On retrouve bien la ligne du tableau avec $a = 3$.

EXEMPLE 2 — LECTURE DU TABLEAU

Lire directement depuis le tableau :

- $\mathcal{L}\{\sin(5t)\} = \frac{5}{s^2 + 25}$
- $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$
- $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$

3. Propriétés fondamentales

PROPRIÉTÉ 1

Linéarité

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

La transformée de Laplace est un opérateur linéaire.

EXEMPLE

Calculer $\mathcal{L}\{3e^{-2t} - 5 \sin(4t)\}$ pour $t \geq 0$.

$$\mathcal{L}\{3e^{-2t}\} = \frac{3}{s+2} \quad \mathcal{L}\{5 \sin(4t)\} = \frac{20}{s^2+16}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{3e^{-2t} - 5 \sin(4t)\} = \frac{3}{s+2} - \frac{20}{s^2+16}$$

PROPRIÉTÉ 2

Décalage fréquentiel (translation en s)

Si $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, alors :

$$e^{-at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$$

Multiplier par e^{-at} dans le temps revient à remplacer s par $s+a$ dans $F(s)$.

EXEMPLE

En appliquant ce théorème à $\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$:

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

On retrouve la ligne correspondante du tableau.

PROPRIÉTÉ 3

Décalage temporel (théorème du retard)

$$f(t - T) u(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-Ts} F(s) \quad (T \geq 0)$$

Un retard de T secondes dans le temps correspond à une multiplication par e^{-Ts} dans le domaine de Laplace.

PROPRIÉTÉ 4 — FONDAMENTALE

Transformée de la dérivée

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s F(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-)$$

En général, pour des **conditions initiales nulles** (cas BTS courant) :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$$

Intérêt majeur : la dérivation devient une multiplication par s . Une équation différentielle devient une équation algébrique, beaucoup plus simple à résoudre.

PROPRIÉTÉ 5

Transformée de l'intégrale

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Intégrer dans le temps revient à diviser par s dans le domaine de Laplace.

PROPRIÉTÉ 6

Théorème de la valeur initiale

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s F(s)$$

Permet de trouver la valeur de f à l'instant initial sans calculer $f(t)$.

PROPRIÉTÉ 7

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Condition : ce théorème n'est valable que si $f(t)$ admet une limite finie en $+\infty$, c'est-à-dire si le système est stable (tous les pôles de $sF(s)$ ont une partie réelle strictement négative).

EXEMPLE — VALEUR FINALE

Soit $F(s) = \frac{5}{s(s+2)}$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Pôles de $sF(s) = \frac{5}{s+2}$: unique pôle en $s = -2$ (partie réelle négative) \rightarrow limite finie.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{5}{s(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s+2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

EXERCICE

Soit $F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 3}$.

1. Factoriser le dénominateur et trouver les pôles.
2. Calculer la valeur initiale $f(0^+)$.
3. Le système est-il stable ? Si oui, calculer la valeur finale.

4. Fonction de transfert

DÉFINITION

Fonction de transfert $H(s)$

Pour un système linéaire invariant dans le temps (LTI), à conditions initiales nulles, la **fonction de transfert** est le rapport de la transformée de la sortie sur la transformée de l'entrée :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)}$$

où $E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$ est la transformée de l'entrée et $S(s) = \mathcal{L}\{s(t)\}$ celle de la sortie.

La sortie dans le domaine de Laplace est directement : $S(s) = H(s) \cdot E(s)$.

DÉFINITION

Pôles et zéros

Toute fonction de transfert rationnelle s'écrit :

$$H(s) = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (n \geq m)$$

- **Zéros** z_i : valeurs de s qui annulent le numérateur ($H(z_i) = 0$)
- **Pôles** p_i : valeurs de s qui annulent le dénominateur ($|H(p_i)| \rightarrow \infty$)
- **Représentation graphique** : pôles notés \times et zéros notés \circ dans le plan complexe

CRITÈRE DE STABILITÉ DE LAPLACE

Stabilité d'un système à partir des pôles

Un système est **stable** si et seulement si tous ses pôles ont une partie réelle strictement négative :

- $\text{Re}(p_i) < 0$ pour tout $i \rightarrow$ **stable** STABLE
- $\text{Re}(p_i) = 0$ pour au moins un pôle \rightarrow **oscillations entretenues**
- $\text{Re}(p_i) > 0$ pour au moins un $i \rightarrow$ **instable** INSTABLE

Les pôles stables se trouvent dans le **demi-plan gauche** du plan de Laplace ($\sigma < 0$).

EXEMPLE 1 — ANALYSE PÔLES-ZÉROS

Analyser $H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 2}$.

Factorisation du dénominateur : $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$

Pôles : $p_1 = -1, p_2 = -2$ — Zéro : $z_1 = -2$

Tous les pôles ont une partie réelle négative → **STABLE**

Remarque : $p_2 = z_1 = -2$ → simplification : $H(s) = \frac{1}{s + 1}$

EXEMPLE 2 — SYSTÈME INSTABLE

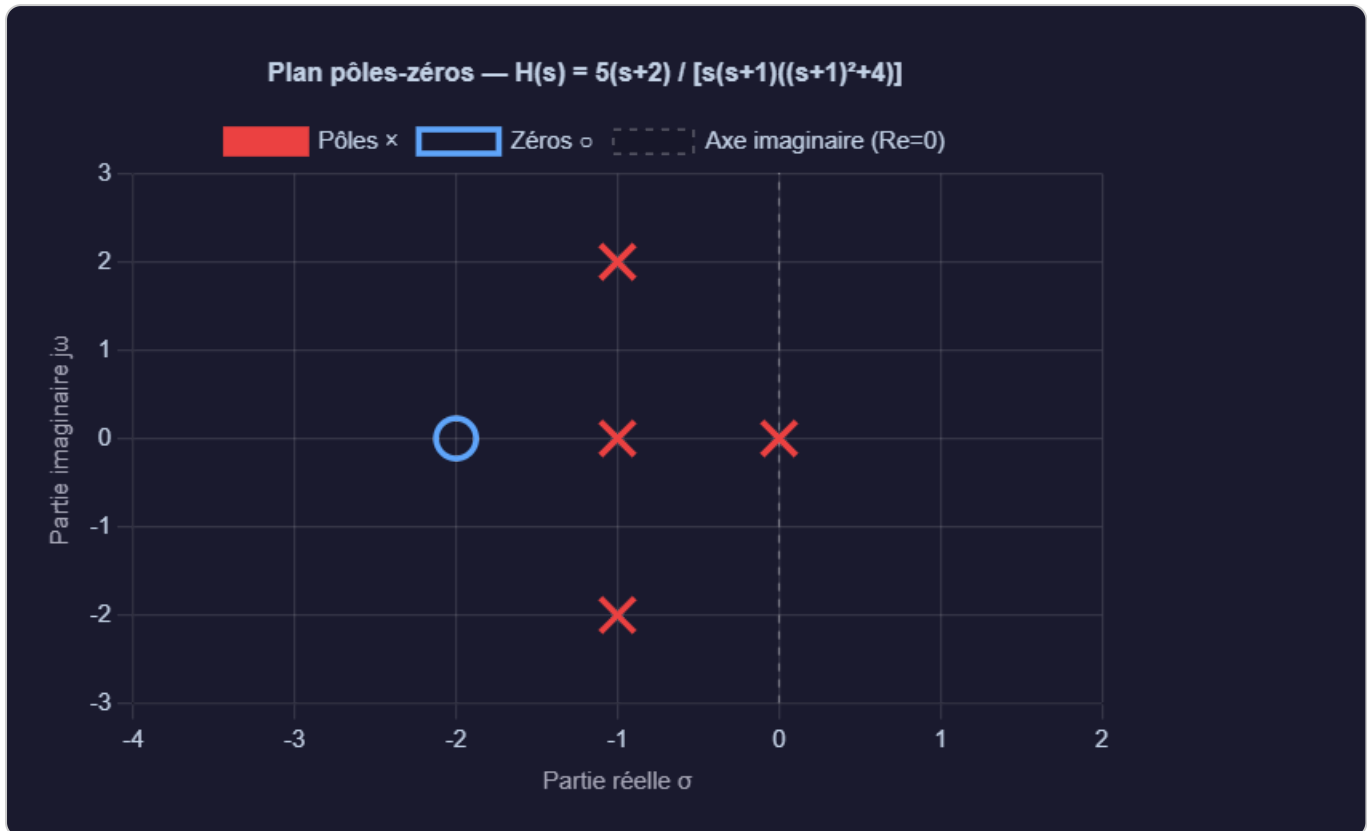
Analyser $H(s) = \frac{1}{s^2 - s + 2}$.

Discriminant : $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

Pôles complexes : $p_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{7}}{2}$ avec $\text{Re}(p) = \frac{1}{2} > 0$

Au moins un pôle avec partie réelle positive → **INSTABLE**

Visualisation : diagramme pôles-zéros dans le plan de Laplace



5. Décomposition en éléments simples (DES)

La décomposition en éléments simples permet d'exprimer une fraction rationnelle $F(s)$ (avec $\deg \text{num} < \deg \text{den}$) comme somme de fractions plus simples, afin d'appliquer le tableau des transformées inverses.

MÉTHODE — TYPES D'ÉLÉMENTS SIMPLES

Cas 1 : Pôle réel simple p_i

$$\frac{A_i}{s - p_i} \quad \text{avec} \quad A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

Cas 2 : Pôle réel double p_i

$$\frac{A_1}{s - p_i} + \frac{A_2}{(s - p_i)^2} \quad \text{avec} \quad A_2 = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^2 F(s), \quad A_1 = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} [(s - p_i)^2 F(s)]$$

Cas 3 : Pôles complexes conjugués $-a \pm j\omega_0$

$$\frac{As + B}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} = \text{combinaison de } e^{-at} \cos(\omega_0 t) \text{ et } e^{-at} \sin(\omega_0 t)$$

EXEMPLE 1 — PÔLES RÉELS SIMPLES

Décomposer $F(s) = \frac{5s + 6}{s(s + 2)(s + 3)}$.

On pose : $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$

Calcul de A (multiplier par s , puis $s \rightarrow 0$) :

$$A = \frac{5s + 6}{(s + 2)(s + 3)} \Big|_{s=0} = \frac{6}{2 \times 3} = 1$$

Calcul de B (multiplier par $s + 2$, puis $s \rightarrow -2$) :

$$B = \frac{5s + 6}{s(s + 3)} \Big|_{s=-2} = \frac{-10 + 6}{(-2)(1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Calcul de C (multiplier par $s + 3$, puis $s \rightarrow -3$) :

$$C = \frac{5s + 6}{s(s + 2)} \Big|_{s=-3} = \frac{-15 + 6}{(-3)(-1)} = \frac{-9}{3} = -3$$

Résultat : $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s + 2} - \frac{3}{s + 3}$

Transformée inverse : $f(t) = (1 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}) u(t)$

EXEMPLE 2 — PÔLES COMPLEXES CONJUGUÉS

Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+6}{(s+1)^2+4}\right\}$.

On identifie la forme avec $a = 1, \omega_0 = 2$. On réécrit le numérateur :

$$2s + 6 = 2(s + 1) + 4 = 2(s + 1) + 2 \cdot 2$$

$$F(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{2 \cdot 2}{(s+1)^2+4}$$

Par transformée inverse terme à terme :

$$f(t) = 2e^{-t} \cos(2t) + 2e^{-t} \sin(2t) = 2e^{-t} [\cos(2t) + \sin(2t)]$$

EXEMPLE 3 — PÔLE DOUBLE

Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+2)^2}\right\}$.

On pose : $\frac{3}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$

$$A = \frac{3}{(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{4}$$

$$B_2 = \frac{3}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Pour B_1 , on identifie en développant ou en posant $s = 1$:

$$\frac{3}{1 \cdot 9} = \frac{3}{4} + \frac{B_1}{3} + \frac{-3/2}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \frac{B_1}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow B_1 = -\frac{3}{4}$$

$$F(s) = \frac{3/4}{s} - \frac{3/4}{s+2} - \frac{3/2}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{3}{2}te^{-2t}$$

6. Application : circuit RC

Un circuit RC série est alimenté par un échelon de tension $e(t) = E_0 u(t)$ avec $E_0 = 10 \text{ V}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$.

Équation différentielle :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t)$$

Constante de temps :

$$\tau = RC = 10^3 \times 10^{-4} = 0,1 \text{ s}$$

Conditions initiales : $u_C(0^-) = 0$

Résolution dans le domaine de Laplace :

$$\tau \left[s U_C(s) - \underbrace{u_C(0^-)}_{=0} \right] + U_C(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$(\tau s + 1) U_C(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$U_C(s) = \frac{E_0}{s(\tau s + 1)}$$

Décomposition en éléments simples :

$$U_C(s) = \frac{E_0/\tau}{s(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$A = E_0 = 10 \quad B = -E_0 = -10$$

$$U_C(s) = 10 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 10} \right)$$

Transformée inverse :

$$u_C(t) = 10 (1 - e^{-10t}) u(t) \quad [\text{V}]$$

ATTENTION — FONCTION DE TRANSFERT DU CIRCUIT RC

La fonction de transfert $H(s) = \frac{U_C(s)}{E(s)}$ est obtenue en posant $e(t) = \delta(t)$ (entrée impulsionnelle), soit $E(s) = 1$:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{0,1s + 1}$$

Pôle unique : $p = -\frac{1}{\tau} = -10 \rightarrow \text{Re}(p) = -10 < 0 \rightarrow$ **STABLE**

7. Systèmes du 1er ordre

DÉFINITION

Forme canonique du 1er ordre

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

- K : gain statique (rapport sortie/entrée en régime permanent)
- τ : constante de temps (s) — caractérise la rapidité de la réponse
- Pôle unique : $p = -1/\tau$ (toujours stable si $\tau > 0$)

Réponse indicielle ($E(s) = 1/s$)

$$S(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s(1 + \tau s)} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right)$$

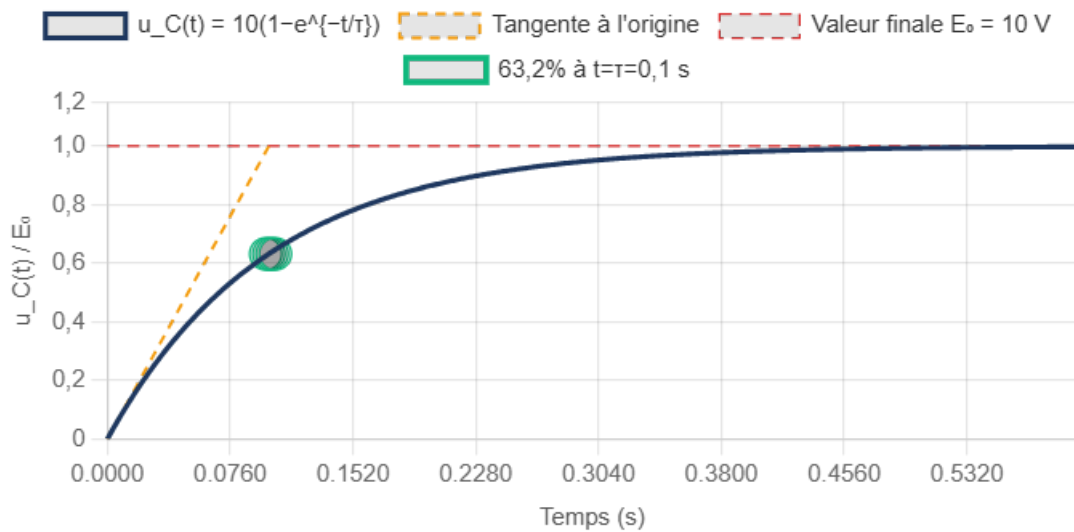
$$s(t) = K \left(1 - e^{-t/\tau} \right) u(t)$$

PROPRIÉTÉ — LECTURE GRAPHIQUE DE τ

Instant	Valeur de $s(t)/K$	Interprétation
$t = \tau$	$1 - e^{-1} \approx 63,2\%$	Méthode de lecture de τ
$t = 2\tau$	$\approx 86,5\%$	
$t = 3\tau$	$\approx 95,0\%$	Souvent considéré comme "permanent"
$t = 5\tau$	$\approx 99,3\%$	Très proche du régime final

La tangente à l'origine coupe la valeur finale K exactement en $t = \tau$.

Réponse indicielle — Circuit RC ($\tau = 0,1$ s)



8. Systèmes du 2e ordre

DÉFINITION

Forme canonique du 2e ordre

$$H(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- K : gain statique
- ω_n : pulsation propre non amortie (rad/s)
- ξ (ξ) : facteur d'amortissement (sans dimension) — détermine le régime

Régimes selon la valeur de ξ

Le discriminant du dénominateur : $\Delta = 4\omega_n^2(\xi^2 - 1)$

Valeur de ξ	Régime	Nature des pôles	Comportement
$\xi > 1$	Sur-amorti	2 réels négatifs distincts	Pas de dépassement, réponse lente
$\xi = 1$	Critique	1 réel double $-\omega_n$	Pas de dépassement, réponse la plus rapide sans oscillation
$0 < \xi < 1$	Sous-amorti	2 complexes conjugués	Dépassement et oscillations amorties
$\xi = 0$	Non amorti	Purs imaginaires $\pm j\omega_n$	Oscillations permanentes

DÉFINITION

Pulsation propre amortie

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (0 < \xi < 1)$$

C'est la pulsation des oscillations en régime sous-amorti.

Réponse indicielle — régime sous-amorti ($0 < \xi < 1$)

$$s(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right] u(t) \quad \text{avec } \varphi = \arccos(\xi)$$

PROPRIÉTÉ — PREMIER DÉPASSEMENT

$$D\% = 100 \times \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

Le dépassement ne dépend que de ξ (pas de ω_n ni de K).

Valeurs numériques :

ξ	0,1	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8
D%	72,9 %	52,7 %	25,4 %	9,5 %	4,6 %	1,5 %

EXEMPLE — FOUR INDUSTRIEL (SITUATION PROFESSIONNELLE)

Données : $\omega_n = 0,5 \text{ rad/s}$, $\xi = 0,4$, $K = 1$.

$$H(s) = \frac{(0,5)^2}{s^2 + 2(0,4)(0,5)s + (0,5)^2} = \frac{0,25}{s^2 + 0,4s + 0,25}$$

Pôles : $s^2 + 0,4s + 0,25 = 0 \Rightarrow \Delta = 0,16 - 1 = -0,84 < 0$

$$p_{1,2} = \frac{-0,4 \pm j\sqrt{0,84}}{2} = -0,2 \pm j0,458$$

Parties réelles négatives → **STABLE**

Pulsation amortie : $\omega_d = 0,5\sqrt{1 - 0,16} \approx 0,458 \text{ rad/s}$

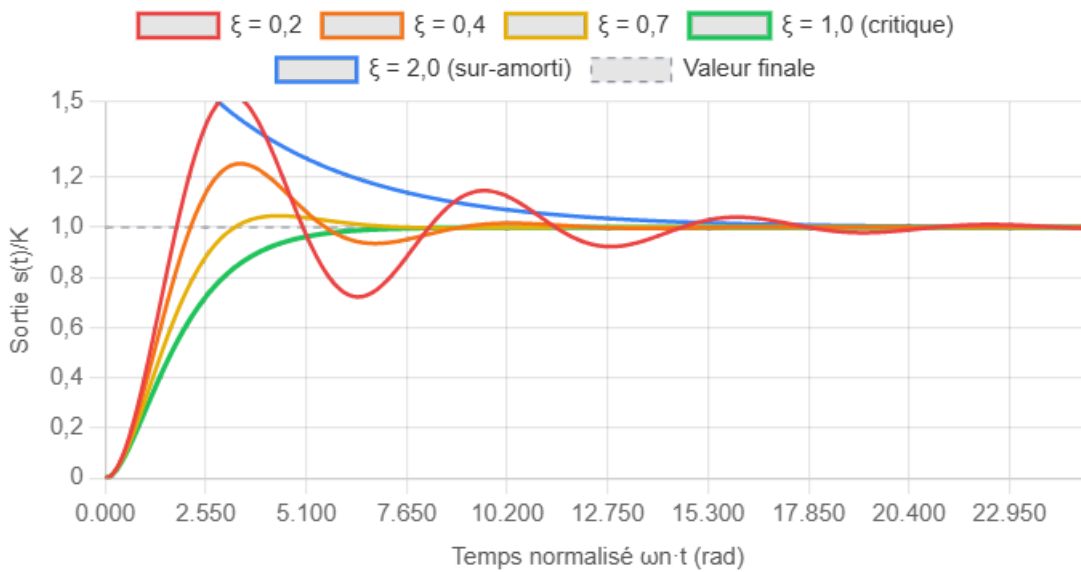
Dépassement : $D\% = 100 e^{-\pi \times 0,4 / \sqrt{0,84}} \approx 25,4 \%$

Conséquence pratique : Pour un échelon de $150 \text{ }^\circ\text{C}$, la température atteindra au maximum :

$$T_{max} = 200 + 0,254 \times 150 \approx 238 \text{ }^\circ\text{C}$$

L'ingénieur doit vérifier que les matériaux du four supportent cette surtempérature transitoire de $38 \text{ }^\circ\text{C}$.

Réponse indicielle — Système du 2e ordre ($\omega_n = 1 \text{ rad/s}$) pour différents ξ



9. Résolution d'une équation différentielle par Laplace

MÉTHODE GÉNÉRALE EN 6 ÉTAPES

Étape 1. Écrire l'équation différentielle reliant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$.

Étape 2. Appliquer $\mathcal{L}\{\cdot\}$ membre à membre en utilisant la propriété de dérivation.

Étape 3. Substituer les conditions initiales $s(0^-), s'(0^-), \dots$ (souvent nulles).

Étape 4. Résoudre l'équation algébrique pour exprimer $S(s)$.

Étape 5. Décomposer $S(s)$ en éléments simples.

Étape 6. Calculer $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(s)\}$ par lecture du tableau des transformées usuelles.

EXEMPLE COMPLET

Résoudre $y'' + 5y' + 6y = 6u(t)$ avec $y(0^-) = y'(0^-) = 0$.

Étapes 2 et 3 (CI nulles) :

$$s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 6 Y(s) = \frac{6}{s}$$

Étape 4 :

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{6}{s} \implies Y(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+3)}$$

Étape 5 — DES :

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \frac{6}{2 \times 3} = 1 \quad B = \frac{6}{(-2)(1)} = -3 \quad C = \frac{6}{(-3)(-1)} = 2$$

Étape 6 :

$$y(t) = (1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$$

Vérification — valeur finale : $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{6}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{6}{6} = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \checkmark$

EXERCICE D'APPLICATION

Un circuit RL série (résistance $R = 2\Omega$, inductance $L = 1\text{ H}$) est soumis à une tension $e(t) = 4u(t)$ V. L'équation est $L \frac{di}{dt} + Ri = e(t)$ avec $i(0^-) = 1\text{ A}$.

Déterminer $i(t)$ pour $t \geq 0$.

10. Réponse indicielle — gain statique et régimes

DÉFINITION — RÉPONSE INDICIELLE

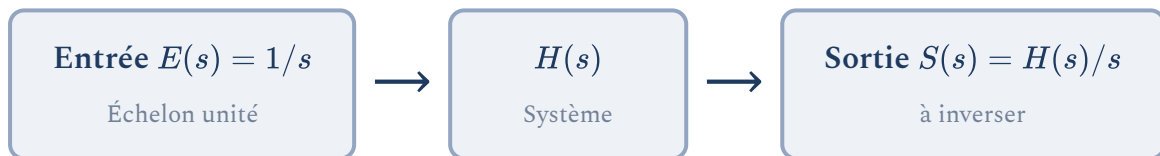
La **réponse indicielle** d'un système est sa réponse à un échelon unité en entrée, le système étant au repos pour $t < 0$. Dans le domaine de Laplace :

$$S(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

PROPRIÉTÉ — GAIN STATIQUE

Le **gain statique** est la valeur de la sortie en régime permanent pour une entrée échelon :

$$K = H(0) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$



Régime transitoire vs régime permanent

La réponse indicielle se décompose toujours en deux phases :

- **Régime transitoire** : phase de démarrage, oscillations éventuelles, dépassements. Elle dure environ 3τ à 5τ pour un système du 1^{er} ordre, et dépend de ξ et ω_n pour un système du 2^e ordre.
- **Régime permanent** : état stabilisé après le transitoire. Sa valeur vaut $K \cdot E_0$ (gain statique fois amplitude de l'échelon).

11. Application BTS FED — Thermostat et variateur de vitesse

Thermostat industriel — Boucle de régulation

Un technicien en génie thermique programme le régulateur d'un four de séchage dans une menuiserie industrielle. Le four doit maintenir une température de 80 °C pour sécher des panneaux de bois. La consigne passe en échelon de 20 °C à 80 °C ($\Delta T = 60$ °C).

Le modèle thermique du four (mesuré expérimentalement) est un système du 2^e ordre :
 $\omega_n = 0,2 \text{ rad/s}$, $\xi = 0,6$, $K = 1$.

RÉSOLUTION — FOUR DE SÉCHAGE

1. Fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{(0,2)^2}{s^2 + 2(0,6)(0,2)s + (0,2)^2} = \frac{0,04}{s^2 + 0,24s + 0,04}$$

2. Pôles : discriminant $\Delta = (0,24)^2 - 4(0,04) = 0,0576 - 0,16 = -0,1024 < 0$

$$p_{1,2} = \frac{-0,24 \pm j\sqrt{0,1024}}{2} = -0,12 \pm j0,16$$

Parties réelles : $-0,12 < 0 \rightarrow$ **STABLE**

3. Dépassement relatif :

$$D\% = 100 e^{-\pi \times 0,6 / \sqrt{1-0,36}} = 100 e^{-\pi \times 0,6 / 0,8} = 100 e^{-2,356} \approx 9,5 \%$$

4. Conséquence pratique :

Température maximale atteinte : $T_{max} = 80 + 0,095 \times 60 \approx 85,7 \text{ }^\circ\text{C}$. Le technicien doit vérifier que les panneaux supportent brièvement $86 \text{ }^\circ\text{C}$ sans dommage. Si ce n'est pas acceptable, il augmentera ξ (vers 0,7-0,8) pour réduire le dépassement à moins de 5 %.

5. Pulsation amortie :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0,2 \sqrt{1 - 0,36} = 0,2 \times 0,8 = 0,16 \text{ rad/s}$$

Pseudo-période d'oscillation : $T_d = 2\pi / \omega_d \approx 39,3 \text{ s}$.

EXERCICE — VARIATEUR DE VITESSE

Un variateur de vitesse pilote un moteur d'entraînement de convoyeur. La fonction de transfert vitesse/tension de commande est :

$$H(s) = \frac{120}{s^2 + 14s + 120}$$

1. Identifier K , ω_n et ξ . Préciser le régime.
2. Le système est-il stable ?
3. Calculer le dépassement en % pour une consigne échelon.
4. Pour une consigne de 1 500 tr/min (échelon), quelle vitesse maximale sera atteinte ?

EXERCICE — BOUCLE FERMÉE AVEC CORRECTEUR

Un procédé industriel a pour fonction de transfert $G(s) = \frac{4}{s + 2}$. On le place en boucle fermée avec un correcteur proportionnel $C(s) = K_c$.

1. Écrire la fonction de transfert en boucle fermée $T(s)$.
2. Pour quelle valeur de K_c obtient-on une constante de temps $\tau_{BF} = 0,1$ s ?
3. Calculer le gain statique correspondant et l'erreur statique.

À retenir — Formules essentielles

Définition

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Dérivation (CI nulles)

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s)$$

Intégration

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)}$$

Stabilité

Tous les pôles : $\text{Re}(p_i) < 0$

Système du 1er ordre

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

Système du 2e ordre

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$D\% = 100 e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformées à mémoriser

$f(t)$ pour $t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$s/(s^2 + \omega_0^2)$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/[(s+a)^2 + \omega_0^2]$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$(s+a)/[(s+a)^2 + \omega_0^2]$

Transformée de Laplace

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Transformées usuelles et linéarité (4 pts)

À l'aide du tableau des transformées usuelles et de la linéarité, déterminer la transformée de Laplace des fonctions causales suivantes ($t \geq 0$).

a. $f(t) = e^{-4t}$ (1 pt)

b. $g(t) = \sin(3t)$ (1 pt)

c. $h(t) = 2e^{-t} - 5 \cos(4t)$ (2 pts)

Exercice 2 — Théorèmes de la valeur initiale et finale (4 pts)

Soit $F(s) = \frac{4}{s(s+2)}$.

a. Calculer la valeur initiale $f(0^+)$. (2 pts)

b. Le système est-il stable ? Calculer la valeur finale $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. (2 pts)

Exercice 3 — Pôles et stabilité (4 pts)

On considère deux fonctions de transfert :

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \text{ et } H_2(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}.$$

a. Déterminer les pôles de H_1 et conclure sur sa stabilité. (2 pts)

b. Déterminer les pôles de H_2 et conclure sur sa stabilité. (2 pts)

Exercice 4 — Décomposition en éléments simples (4 pts)

Décomposer en éléments simples $F(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+3)}$, puis donner $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Exercice 5 — Résolution d'une équation différentielle (4 pts)

Un circuit RC série vérifie $\tau \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E_0 u(t)$ avec $\tau = 0,1$ s, $E_0 = 10$ V et $u_C(0^-) = 0$.

- Appliquer la transformée de Laplace et exprimer $U_C(s)$. (2 pts)
 - Décomposer puis déterminer $u_C(t)$ pour $t \geq 0$. (2 pts)
-