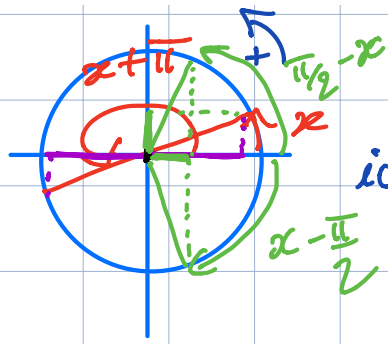


# 1 Notation complexe

Nous allons voir dans cet exercice que certaines formules se retrouvent de manière rapide et élégante grâce à la notation complexe.

1.1. Quel est l'amplitude et la phase initiale du signal :

$$s_0(t) = -2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$$\cos(x - \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

$$\text{ici } s_0(t) = 2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} - \pi) \\ = \underbrace{2}_{X_m} \cos(\omega t \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{\varphi}).$$

Donner la représentation complexe des signaux suivants :

1.2.  $s_1(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$  et  $s_2(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$ .

$S_0$  : amplitude complexe

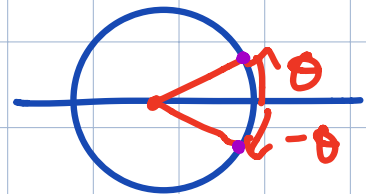
\* On a  $s_1(t) = \text{Re}(S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}) \Rightarrow s_1(t) = \underbrace{S_0 e^{j\varphi}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t}$ .

\*  $s_2(t) = S_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi) \Rightarrow s_2(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}$

$$\Rightarrow s_2(t) = S_0 e^{-j\pi/2} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = -j S_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

1.3.  $s_3(t) = A \cos(\omega t)$  et  $s_4(t) = B \sin(\omega t)$ , en déduire la représentation complexe de  $s_5(t) = s_3(t) + s_4(t)$  puis l'expression de son amplitude  $C$  et de sa phase initiale  $\varphi$  (on distinguera les deux cas :  $A > 0$  ou  $A < 0$ ).

\* Rappel :  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ .



\* ici  $s_3(t) = A e^{j\omega t}$  avec  $s_3(t) = \text{Re}(s_3(t))$ .

\* On a  $s_4(t) = -j B e^{j\omega t}$  (cf. 1.2)

On peut le retrouver en remarquant que :

$$-j \underbrace{(\cos \theta + j \sin \theta)}_{e^{j\theta}} = -j \cos \theta - j^2 \sin \theta = \sin \theta - j \cos \theta$$

d'où  $\operatorname{Re}(-j e^{j\theta}) = \sin \theta$

\* On en déduit  $s_5(t) = s_3(t) + s_4(t)$   
 $\Rightarrow s_5(t) = A e^{j\omega t} - j B e^{j\omega t} = \underbrace{(A - jB)}_{S_5} e^{j\omega t}$  S<sub>5</sub> : amplitude complexe.

d'où  $C = |A - jB| = \sqrt{A^2 + B^2}$

et  $\varphi = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) & \text{si } A > 0 \\ \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) \pm \pi & \text{si } A < 0 \end{cases}$

1.4.  $s_6(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_7(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , en déduire la représentation complexe de  $s_8(t) = s_6(t) + s_7(t)$  puis l'expression de son amplitude  $S$ . Retrouver ainsi la condition d'interférences constructives et la condition d'interférences destructives lorsque les signaux  $s_6(t)$  et  $s_7(t)$  interfèrent.

\*  $s_6(t) = \underbrace{S_1 e^{j\varphi_1}}_{S_1} e^{j\omega t} \quad ; \quad s_7(t) = \underbrace{S_2 e^{j\varphi_2}}_{S_2} e^{j\omega t}$  amplitude complexe.

$$\text{d'où } s_g(t) = (s_1 + s_2) e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow S^2 = |s_1 + s_2|^2 = (s_1 + s_2)(s_1^* + s_2^*)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S^2 &= \underbrace{s_1 s_1^*}_{S_1^2} + \underbrace{s_2 s_2^*}_{S_2^2} + \underbrace{s_1 s_2^* + s_2 s_1^*}_{2 \operatorname{Re}(s_1 s_2^*)} \\ &= S_1^2 + S_2^2 + 2 \operatorname{Re}(s_1 s_2^*) \\ &= S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Interférences constructives si :  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 [2\pi]$ .  
 " destructives si :  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi [2\pi]$ .

## 2 Mesure de déphasages

**2.1.** Soient deux tensions sinusoïdales <sup>1</sup>  $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ , avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , représentées sur la figure 1.

Pour mesurer le déphasage  $\varphi_2 - \varphi_1$  de  $u_2(t)$  par rapport à  $u_1(t)$ , on repère un instant  $t_1$  de passage par 0 de  $u_1(t)$  sur front montant et l'instant  $t_2$ , le plus proche de  $t_1$ , de passage par 0 de  $u_2(t)$  sur front montant (voir figure ci-dessous). Montrer qu'alors :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T}(t_1 - t_2)$$

1. [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Ondes/general/sinus.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/sinus.php)

$$t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont tq : } \omega t_1 + \varphi_1 = \omega t_2 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

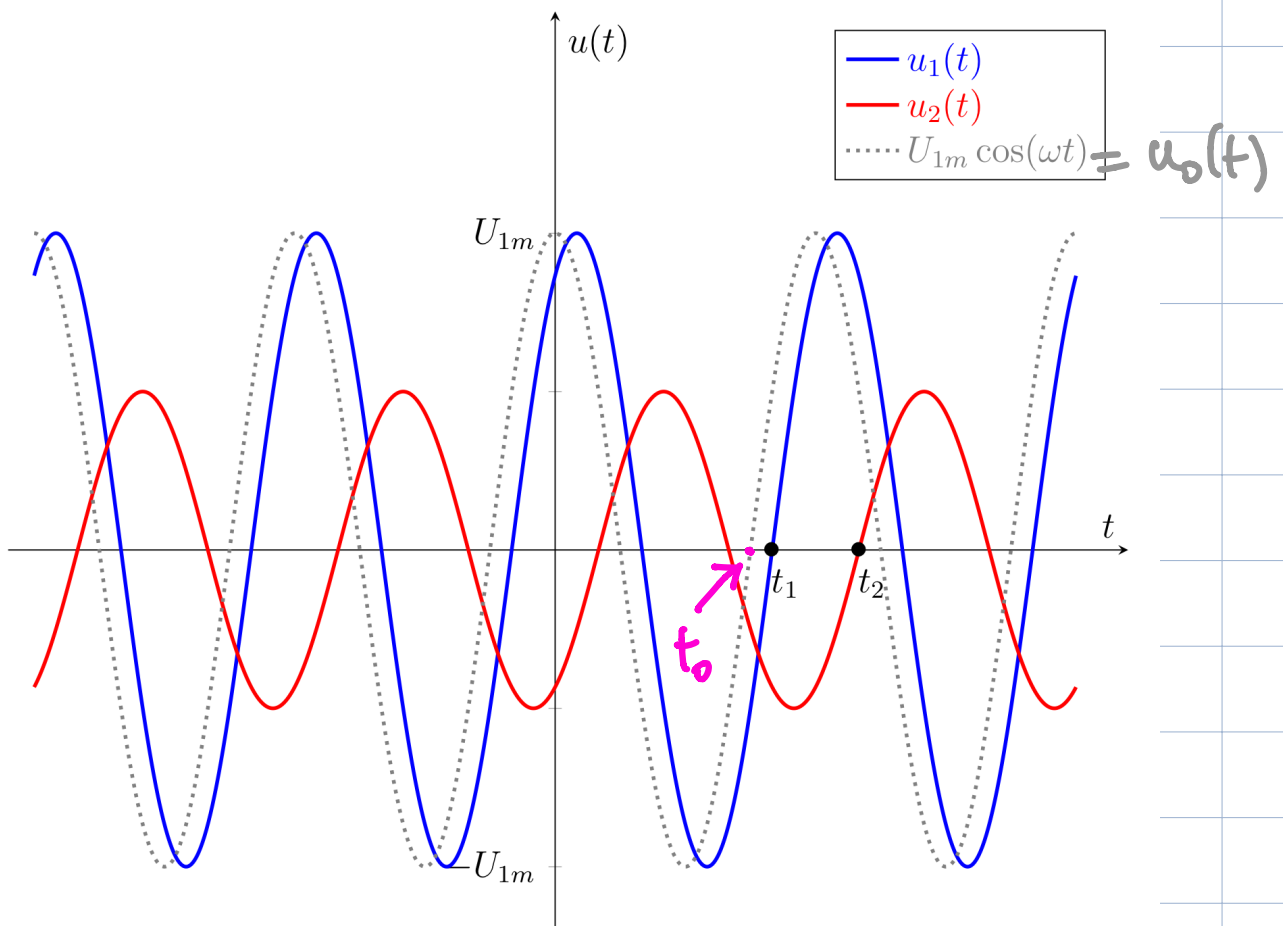
$$\Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t_1 - \omega t_2 = \omega(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{T}(t_1 - t_2)$$

D'après les graphes, calculer et qualifier ce déphasage dans le cas présent.  
Calculer  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  puis donner l'amplitude complexe de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ .

Sur le graphe  $t_1 - t_2 \equiv -0,95 \text{ ms}$   
 $T \equiv 2,85 \text{ ms}$

d'où  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \times \frac{-0,95}{2,85} \approx -2,13 \text{ rad.} \approx -\frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$

On mesure aussi :  $U_{2m} = U_{1m} / 2$ .



Soit  $u_0(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_0)$  avec  $\varphi_0 = 0$

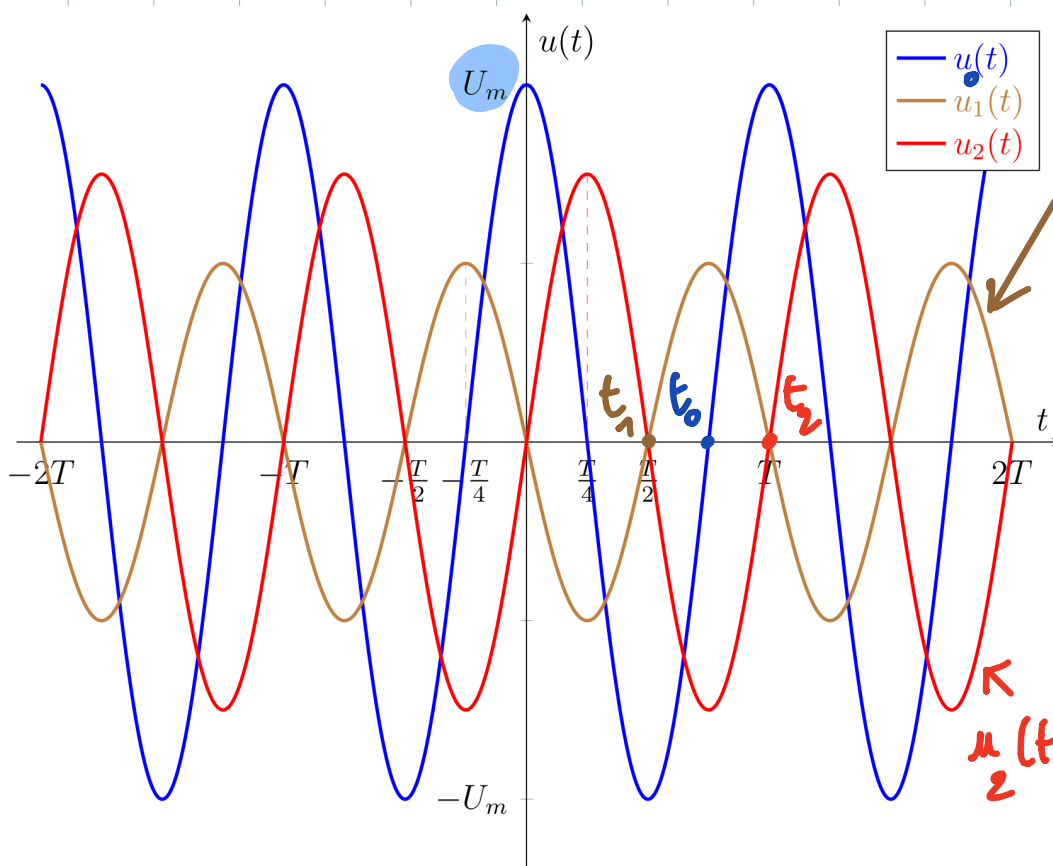
Alors  $\varphi_2 - \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} (t_0 - t_2)$  avec  $t_0 - t_2 \equiv -1,2 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{2\pi \times (-1,2)}{2,85} = -2,65 \text{ rad} \approx -\frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

Ensuite comme on connaît  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  et  $\varphi_2$  on en déduit :

$$\varphi_1 = +2,13 - 2,65 = -0,52 \text{ rad} \approx -\frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

**2.2.** Sur l'oscillogramme de la figure 2, la tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ , avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , est prise comme origine des phases (cela signifie que sa phase initiale est nulle). Donner les représentations complexes de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , en précisant la nature de leur déphasage par rapport à  $u(t)$ .



$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$t_0 = \frac{3T}{4}$$

$$t_1 = \frac{T}{2}; U_{1m} = \frac{U_m}{2}$$

$$t_2 = T; U_{2m} = \frac{3U_m}{4}$$

$$u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ avec } \varphi_0 = 0.$$

\* On rappelle que  $\varphi_j - \varphi_i = \frac{2\pi}{T} (t_i - t_j)$

1<sup>er</sup> cas:  $\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} (t_0 - t_1) = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$

$u_1(t)$  est en quadrature avance de phase sur  $u_0(t)$ .

2<sup>o</sup> cas: 
$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_0 &= \frac{2\pi}{T} (t_0 - t_2) \\ &= \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{1}{4} T\right) \\ &= \frac{2\pi}{T} \times \left(-\frac{T}{4}\right) \\ &= -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$u_2(t)$  est en quadrature retard de phase sur  $u_0(t)$

Remarque:  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi [2\pi] = \pi$

$u_2(t)$  et  $u_1(t)$  sont en opposition de phase.

Représentations complexes:

$$\underline{u}_1(t) = \frac{1}{2} U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_1}$$

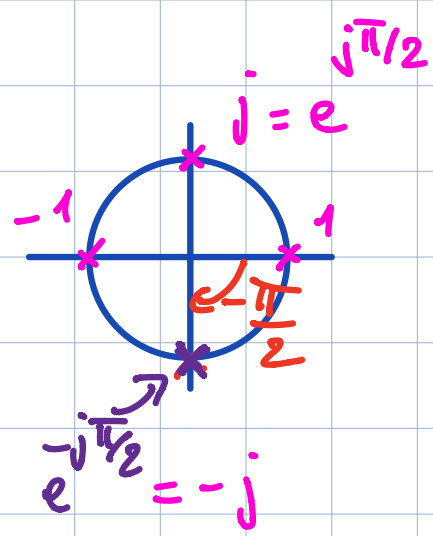
$$= \frac{1}{2} U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} U_m j e^{j\omega t}$$

Son amplitude complexe est:

$$\underline{U}_1 = j \frac{U_m}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_2(t) &= \frac{3}{4} U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_2} \\
 &= \frac{3}{4} U_m e^{j\omega t} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{3}{4} U_m j e^{j\omega t}
 \end{aligned}$$



### 3 Résonance en élongation

Considérons un oscillateur harmonique horizontal<sup>2</sup>, constitué d'un mobile de masse  $m = 1 \text{ kg}$ , attaché à un ressort de constante de raideur  $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , qui oscille le long d'un axe horizontal sur une table à coussin d'air qui élimine les frottements solide au niveau du contact avec le support. Le mobile subit une force de frottements visqueux de l'air :

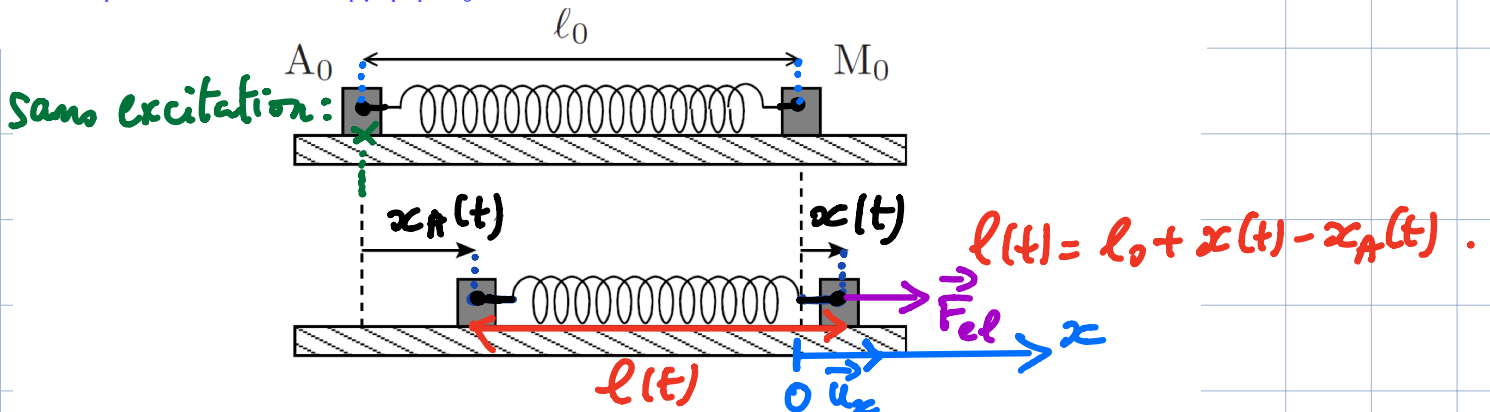
$$\vec{f} = -h\dot{x} \vec{e}_x$$

Cet oscillateur est soumis à une excitation sinusoïdale obtenue en faisant osciller le point A, extrémité gauche du ressort, dont la position  $x_A(t)$  est de la forme :

$$x_A(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

où  $X_0$  est l'amplitude de ce mouvement et  $\omega$  sa pulsation. Sa phase est prise nulle, ce qui revient à prendre l'excitation pour origine des phases.

2. [http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur\\_horizontal.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html)



La position  $x(t)$  de la masse est repérée par rapport à la position d'équilibre en l'absence d'excitation. Autrement dit, l'origine de l'axe des abscisses est pris à l'extrémité droite du ressort lorsque  $x_A = 0$  et  $\ell = \ell_0$ . On considère que le régime sinusoïdal forcé est atteint et on note la position du mobile :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

3.1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$  et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$$

(1)

en donnant l'expression de  $\omega_0$  et  $Q$ .

(3.1) Force de rappel élastique:  $\vec{F}_{el} = -k(l(t) - l_0) \vec{u}_x$   
 $= -k(x(t) - x_A(t)) \vec{u}_x$

Le PFD en projection sur l'axe (Ox) donne:  $m\ddot{x} = \overline{F}_{el} + \overline{f}$  avec  $\overline{F}_{el} = \vec{F}_{el} \cdot \vec{u}_x$ ;  $\overline{f} = \vec{f} \cdot \vec{u}_x$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + k(l(t) - l_0) + h\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + k(x(t) - x_A(t)) + h\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + h\dot{x} + kx(t) = kx_A(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{h}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_A(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$$

3.2. Trouver l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{X}(\omega)$  de  $x(t)$ , puis en déduire l'expression de  $X_m$  et  $\varphi$ .

Représentation complexe de  $x(t)$ , notée  $\underline{x}(t)$ :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\underline{X}} e^{j\omega t}$$

$\underline{X}$ : amplitude complexe

Si  $x(t)$  vérifie (1) (E.D. linéaire) alors  $\underline{x}(t)$  vérifie aussi

(1) en notation complexe:

$$\ddot{\underline{x}}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 X_0 \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{repr. complexe de } \cos(\omega t)}$$

→ cela signifie que je remplace toutes les grandeurs inst.

par leur représentation complexe.

| grandeur instantanée                                     | sa représentation complexe                                                                                             |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x(t)$                                                   | $\underline{x}(t)$                                                                                                     |
| $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$                             | $\underline{\dot{x}}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$                                        |
| $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ | $\underline{\ddot{x}}(t) = \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = (j\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$ |
| $\cos(\omega t)$                                         | $e^{j\omega t}$                                                                                                        |

(1) devient donc en notation complexe :

$$-\omega^2 \underline{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{x}(t) (-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2) = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

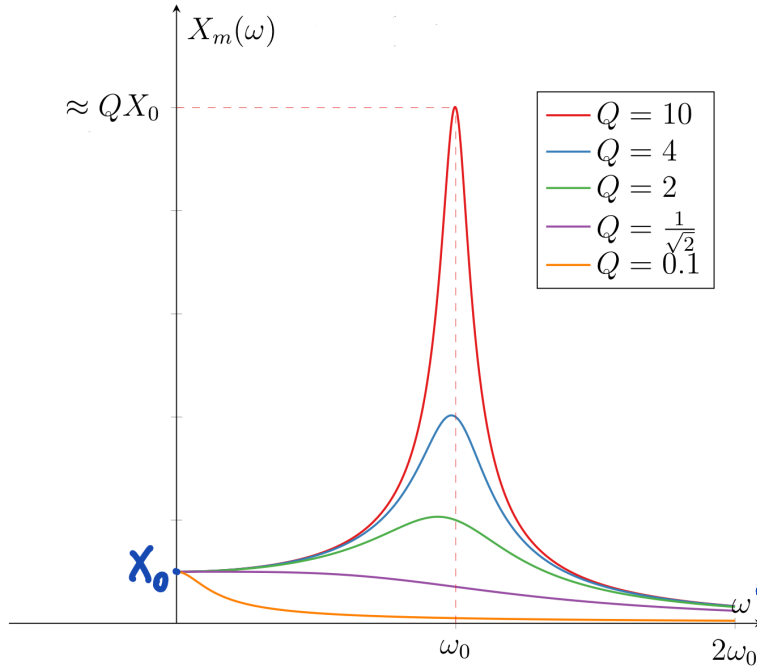
$$\text{on sait que } \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X} e^{j\omega t} (-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2) = \omega_0^2 X_0 e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{\omega_0^2 X_0 \times Q / \omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{j\omega_0 \omega}{Q}) \times \frac{Q}{\omega_0^2}} = \frac{Q X_0}{Q (-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1) + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Si je pose  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$\underline{X} = \frac{Q X_0}{Q (1 - u^2) + j u} \Rightarrow X_m = |\underline{X}| = \frac{Q X_0}{\sqrt{Q^2 (1 - u^2)^2 + u^2}}$$



Il n'y a résonance que si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  (inégalité stricte)

Pour  $Q=0,1$  et  $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ , il n'y a pas résonance.

Puis  $\varphi = \text{Arg}(\underline{X}) = \text{Arg}\left(\frac{Q X_0}{Q(1-u^2) + ju}\right)$

$$\Rightarrow \varphi = -\text{Arg}(Q(1-u^2) + ju) = \text{Arg}(Q(1-u^2) - ju)$$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{-u}{1-u^2}\right) & \text{si } u < 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0 \\ -\text{Arctan}\left(\frac{u}{1-u^2}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$= -\frac{\pi}{2}$  pour  $u=1^-$

$\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$  pour  $u=1^+$

3.3. A quelle condition sur  $h$ , l'amplitude de  $x(t)$  peut-elle être supérieure à celle de  $x_A(t)$  ?

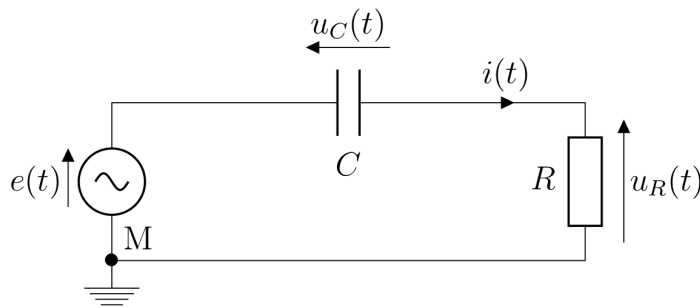
$X_m$  peut dépasser  $X_0$  uniquement s'il y a résonance, c-à-d

$$\text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{km}}{h} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h < \sqrt{2km} = 1,41 \text{ kg.s}^{-1}$$

## 4 Circuit RC en régime sinusoïdal

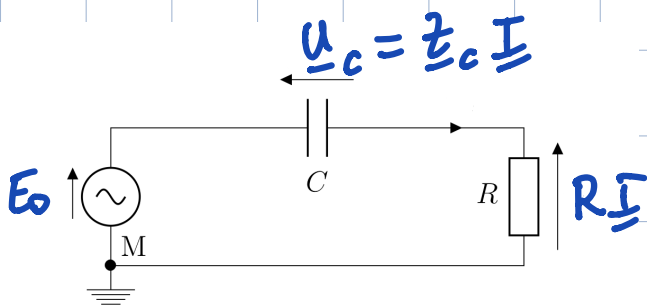
Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension possède une force électromotrice  $e(t)$  sinusoïdale d'amplitude  $E_0 = 1 \text{ V}$ , de phase initiale nulle ( $e(t)$  est prise comme origine des phases), et de pulsation  $\omega$  :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$



On se place en régime sinusoïdal forcé.

4.1. Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}$  du courant circulant dans le circuit puis en déduire l'expression de  $i(t)$ .



la loi des mailles donne :

$$Z_C \underline{I} + R \underline{I} = E_0$$

$$\underline{I} \left( \frac{1}{j\omega C} + R \right) = E_0$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{E_0 \times j\omega C}{\left( \frac{1}{j\omega C} + R \right) j\omega C} = \frac{j \omega C E_0}{1 + jRC\omega} \quad \text{on pose } Z = RC.$$

$$\text{d'où } I_m = |\underline{I}| = \frac{E_0}{R} \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(C\omega)^2}} = \frac{E_0}{R} \frac{C\omega}{\sqrt{1+(C\omega)^2}}$$

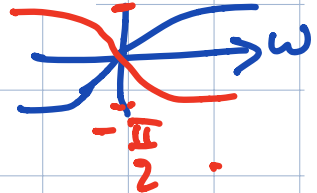
$$\begin{aligned} \text{et } \varphi_i = \text{Arg}(\underline{I}) &= \underbrace{\text{Arg}(j C\omega E_0)}_{\frac{\pi}{2}} - \text{Arg}(1 + j C\omega) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(C\omega). \end{aligned}$$

$$\text{Au final } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi).$$

4.2. Quelle est la nature du déphasage de  $i(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

$\pi/2$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall \omega : & -\arctan(C\omega) > -\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow & \frac{\pi}{2} - \arctan(C\omega) > 0 \\ \Rightarrow & \varphi_i > 0 \quad \forall \omega. \end{aligned}$$



$i(t)$  est donc toujours en avance sur  $e(t)$ .

4.3. Tracer l'allure de  $e(t)$  et  $u_R(t)$  dans le cas où  $\omega = \frac{1}{RC} = 1/C = \omega_c \Leftrightarrow \omega C = 1$

Soit  $\omega_c = \frac{1}{C}$  : la pulsation de coupure, on calcule :

$$I_m(\omega_c) = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2} \cdot R} \Rightarrow U_{Rm} = 1$$

$$\Rightarrow U_{Rm} = R I_m = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

$$* \varphi_i(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \varphi_{u_R}$$

On a tracé les oscillogrammes sur la figure 3.

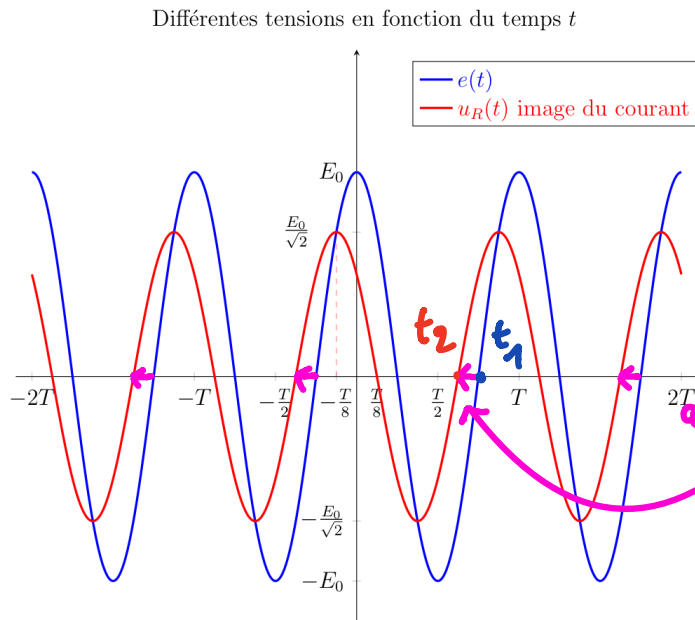


FIGURE 3 – Avance du courant sur la tension  $e(t)$  pour une charge capacitive

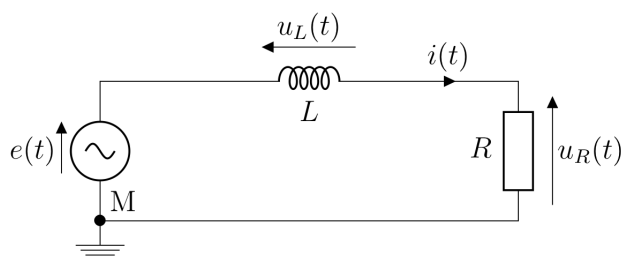
$$6m \quad u_R(t) = \operatorname{Re}(\underline{u}_R(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} e^{j\omega t}\right)$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

## 5 Circuit RL en régime sinusoïdal

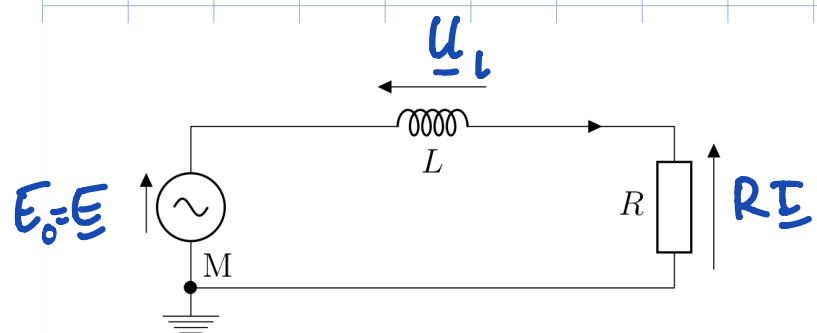
Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension possède une force électromotrice  $e(t)$  sinusoïdale d'amplitude  $E_0 = 1 \text{ V}$ , de phase initiale nulle ( $e(t)$  est prise comme origine des phases), et de pulsation  $\omega$  :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$



On se place en régime sinusoïdal forcé.

**5.1.** Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}$  du courant circulant dans le circuit puis en déduire l'expression de  $i(t)$ .



Loi des mailles:

$$\begin{aligned} E_0 &= R \cdot \underline{I} + \underline{U}_L \\ &= R \underline{I} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I} \\ &= \underline{I} (R + \underline{Z}_L) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \underline{I} = \frac{E_0}{(R + \underline{Z}_L)} = \frac{E_0}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow I_m = |\underline{I}| = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} \quad \text{avec } Z = \frac{L}{R}$$

\* Petit rappel pour trouver  $\varphi$ :

$$\text{Soit } \underline{z} = a + jb = |\underline{z}| e^{j\varphi} = |\underline{z}| \cos \varphi + j |\underline{z}| \sin \varphi$$

$$\text{par identification } \begin{cases} a = |\underline{z}| \cos \varphi & (1) \\ b = |\underline{z}| \sin \varphi & (2) \end{cases}$$

$$\text{alors } \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } \cos \varphi > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } \cos \varphi < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ici } \varphi_i = \text{Ang}(E_0) - \text{Ang}(R + jL\omega)$$

$$= -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(Z\omega) \quad \text{avec } Z = \frac{L}{R}$$

En final : 
$$i(t) = \frac{E_0}{R\sqrt{1+(\omega L)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega L))$$

5.2. Quelle est la nature du déphasage de  $i(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

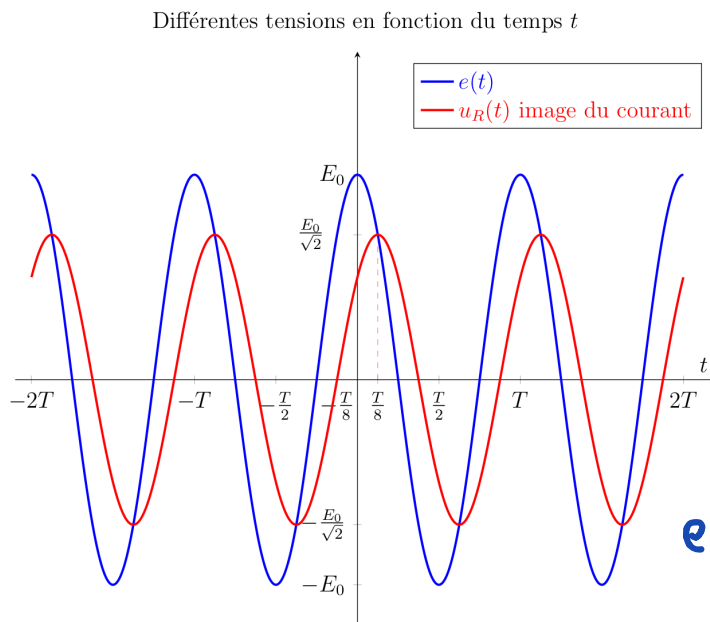
On voit que  $\forall \omega > 0$  :  $\varphi_i = -\arctan(\omega L) < 0$

$i(t)$  est toujours en retard sur  $e(t)$ .

5.3. Tracer l'allure de  $e(t)$  et  $u_R(t)$  dans le cas où  $\omega = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \omega L = 1$

Ici  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$ , on en déduit :

On a tracé les oscillogrammes sur la figure 4.



$$I_m = \frac{E_0}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}R}$$

$$U_{Rm} = R I_m = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

et  $\varphi_i = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

FIGURE 4 – Retard du courant sur la tension  $e(t)$  pour une charge inductive

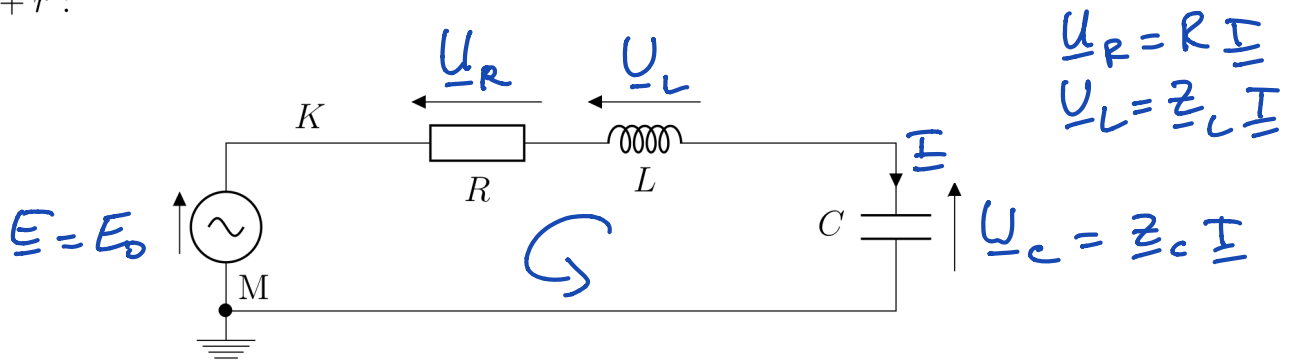
## 6 Résonance d'intensité

Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension possède une force électromotrice  $e(t)$  sinusoïdale d'amplitude  $E_0 = 10 \text{ V}$ , de phase initiale nulle ( $e(t)$  est prise comme origine des phases), et de pulsation  $\omega$ . Cette f.é.m constitue l'excitation sinusoïdale du circuit RLC série :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

$R$  est la résistance totale du circuit quand  $K$  est fermé. Pour évaluer la résistance totale du circuit, on doit prendre en compte la résistance interne du générateur  $R_g = 50 \Omega$ , la résistance interne de la bobine  $r = 13 \Omega$  plus une boîte à décade dont on peut faire varier la résistance  $R_1$  qui est placée en série avec  $L$  et  $C$ . A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et le condensateur est déchargé :

Ainsi, une fois l'interrupteur  $K$  fermé, le circuit est équivalent au circuit ci-dessous avec  $R = R_1 + R_g + r$  :



6.1. On mesure les grandeurs électriques en régime sinusoïdal forcé. Qu'est-ce que cela signifie ?

Cela signifie que le régime transitoire est passé et qu'il ne reste que la solution particulière sinusoïdale de l'ED du circuit :  $u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t) = u_{cp}(t)$

6.2. Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}$  de l'intensité du courant circulant dans le circuit en fonction de  $E_0$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .

La loi des mailles en notation complexe donne :

$$E_0 = Z_L I + Z_C I + R I$$

$$\underline{E}_0 = \underline{I} \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right)$$

$$\underline{I} = \left( \frac{E_0}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} \right) \iff \underline{I} = \left( \frac{E_0}{j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + R} \right)$$

$$\underline{I} = \frac{E_0}{\frac{1 \times j}{j^2 C\omega} + jL\omega + R} = \frac{E_0}{R} \times \frac{1}{1 + \frac{j}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

6.3. En déduire l'expression de l'amplitude  $I_m(\omega)$  de l'intensité du courant dans le circuit et sa phase  $\varphi(\omega)$ .

$$I_m = |\underline{I}| = \frac{E_0}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\varphi = -\arg \left( 1 + j \frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega}) \right) = -\arctan \left( (L\omega - \frac{1}{C\omega}) \frac{1}{R} \right)$$

6.4. Exprimer la pulsation de résonance  $\omega_0$  et les pulsations de coupure  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$

$I_m(\omega)$  est maximale quand son dénominateur est minimal càd :  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$

$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\neq \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ sont tq } I_m(\omega_1) = I_m(\omega_2) = \frac{I_m(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{E_0}{R\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = +1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = -1$$

$\downarrow \times RC\omega$ 
 $\downarrow \times RC\omega$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 - 1 = RC\omega \quad \text{ou} \quad LC\omega^2 - 1 = -RC\omega$$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = R^2 C^2 + 4LC$$

$$\omega_+ = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = \omega_2 > 0$$

$$\omega_- = \frac{RC - \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} < 0$$

$$\Delta = R^2 C^2 + 4LC$$

$$\omega_+ = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = \omega_1 > 0$$

$$\omega_- = \frac{-RC - \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} < 0$$

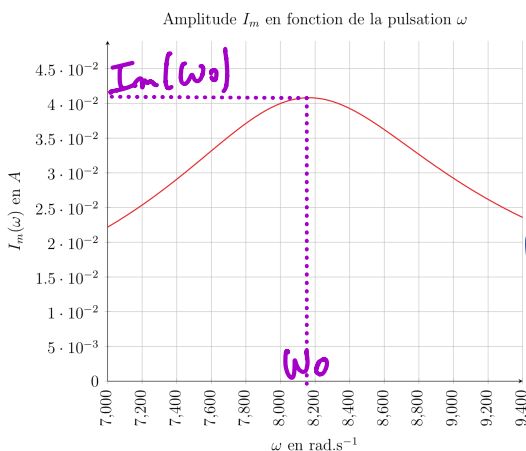
6.5. Montrer que la bande passante est  $\Delta\omega = \frac{R}{L}$

On calcule  $\omega_2 - \omega_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} - \left( \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \right)$

$$= \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

On a relevé les courbes expérimentales pour l'amplitude (figure 3) et la phase (figure 4) de l'intensité du courant dans le circuit :

6.6. Comment obtenir le plus rapidement possible la valeur de  $R$ ? Faire l'application numérique.



On mesure  $I_m(\omega_0) = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ A}$

puis on en déduit  $R$  sachant que  $I_m(\omega_0) = \frac{E_0}{R}$

$$\Rightarrow R = \frac{E_0}{I_m(\omega_0)} = \frac{10}{4,1 \times 10^{-2}} = 244 \, \Omega$$

FIGURE 3 – Amplitude de l'intensité du courant

6.7. Quelle est la méthode la plus précise pour mesurer  $\omega_0$  ? Faire la mesure d'après les courbes.

En a  $\varphi(\omega_0) = 0$ , on peut repérer  $\omega_0$  avec plus de précision sur la courbe de phase

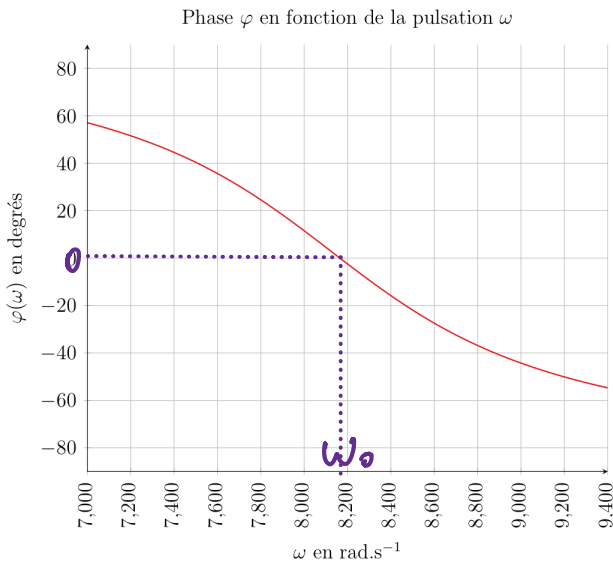


FIGURE 4 – Phase de l'intensité du courant

On mesure  $\omega_0 = 8165 \text{ rad.s}^{-1}$

6.8. Mesurer la bande passante et en déduire la valeur du facteur de qualité  $Q$ .

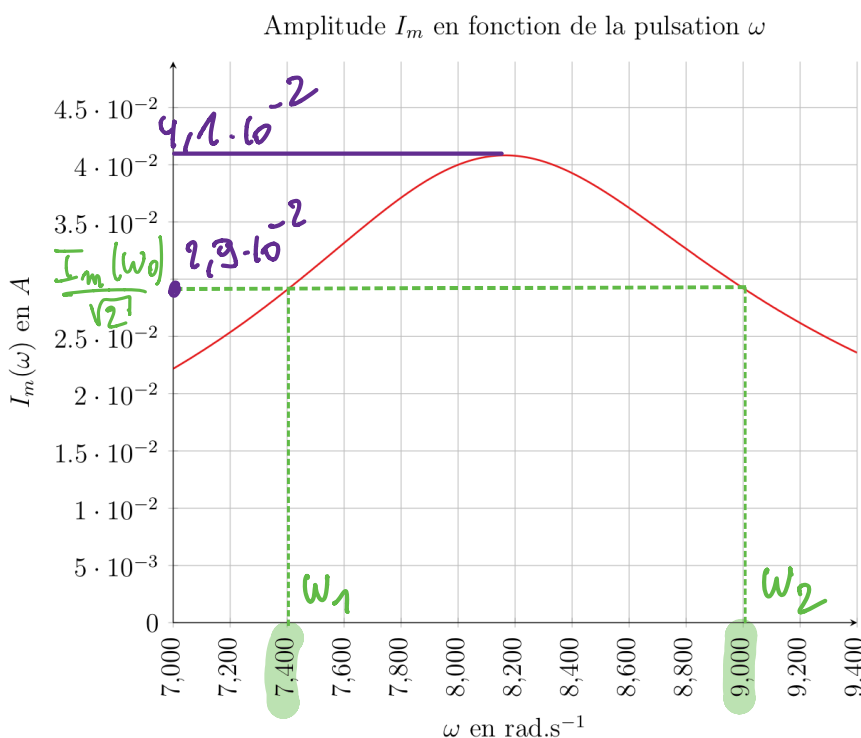


FIGURE 3 – Amplitude de l'intensité du courant

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_2 - \omega_1 \\ &= 9000 - 7400 \\ &= 1600 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{8165}{1600} = 5,1$$

**6.9.** Déduire de ce qui précède les valeurs numériques de  $L$  et  $C$ .

$$\text{On a } \frac{R}{L} = \Delta\omega \Rightarrow L = \frac{R}{\Delta\omega} = \frac{244}{1600} = 0,15 \text{ H}$$

$$\text{et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 10^{-7} \text{ F},$$