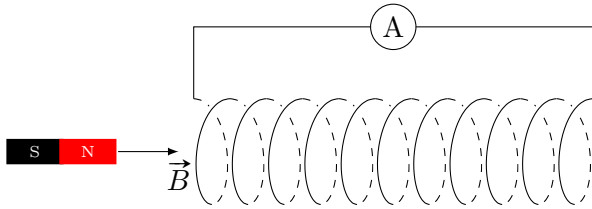


1 Le phénomène d'induction

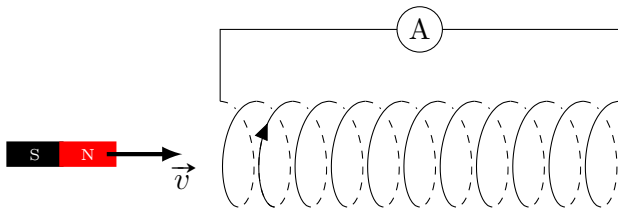
1.1 Observations expérimentales

Bobine dans un champ magnétique constant.



Les lignes de champ d'un aimant vont de son Nord vers son Sud. Un champ magnétique règne donc dans le solénoïde. On n'observe aucun courant dans le solénoïde.

Bobine dans un champ magnétique variable. avec un ampèremètre le courant dans la bobine.



On déplace un aimant à proximité d'une bobine. On mesure

On constate qu'un courant apparaît dans la bobine, malgré l'absence de générateur.

Le courant mesuré à l'ampèremètre est positif. Si on retire l'aimant, on observe un courant, négatif cette fois. Enfin, si on approche le pôle Sud, on observe un courant négatif.

1.2 Bilan

Définition. Le phénomène d'**induction électromagnétique** est l'apparition d'une tension électrique dans un circuit soumis à un champ magnétique. Ce phénomène apparaît dans deux cas de figure :

- lorsqu'un circuit est plongé dans un champ magnétique variable : c'est l'induction de **Neumann** ;
- lorsqu'un circuit est déformé dans un champ magnétique constant : c'est l'induction de **Lorentz** (nous y reviendrons).

Loi de Lenz. L'induction s'oppose par ses conséquences à la cause qui lui a donné naissance.

On peut avoir plusieurs formulations de cette loi :

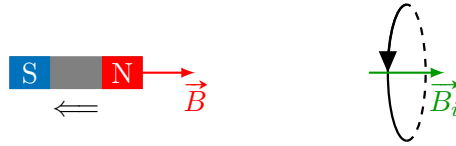
- Le courant induit crée un champ magnétique $\vec{B}_i$ qui tend à modérer les variations du champ magnétique. En effet :
 - on peut voir l'augmentation du champ $\vec{B}$ lié à l'aimant comme la cause de l'induction.
 - Le champ créé par le courant induit $\vec{B}_i$ modère cette augmentation : il est opposé en direction à $\vec{B}$.
 - Cela est cohérent avec le sens de i observé ($\vec{B}$ est vers la droite, donc $\vec{B}_i$ est vers la gauche, d'où le sens de i).

Il est logique d'avoir un changement de signe de i quand on éloigne l'aimant : dans ce cas, c'est la diminution de $\vec{B}$ la cause : pour modérer cette diminution, $\vec{B}_i$ doit être dans le même sens que $\vec{B}$.

- Le courant induit crée un nouveau champ $\vec{B}_i$ qui peut imposer une force limitant la variation du flux.

Application

Quel est le sens du courant dans la situation ci-dessous ? (réponse en vert)



- Quelle est la cause du champ ? Le déplacement de l'aimant vers la gauche donc la diminution du champ $\vec{B}$ régnant dans le solénoïde.
- Quel est donc le sens du champ induit $\vec{B}_i$? Modère à la diminution de $\vec{B}$, donc est dans le même sens que $\vec{B}$.
- Quel est le sens du courant ? Selon la règle de la main droite d'après le sens de $\vec{B}_i$.

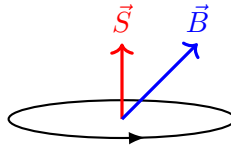
2 Flux du champ magnétique et loi de Faraday

Nous allons désormais donner des lois permettant de décrire quantitativement le phénomène d'induction.

2.1 Flux magnétique

On se limite à la description des cas où le champ magnétique est **uniforme** à l'échelle de la spire. Dans un cas plus général, il faut intégrer le champ magnétique sur toute la surface de la spire.

Définition. Soit une spire de surface S baignant dans un champ magnétique uniforme et dépendant éventuellement du temps $\vec{B}(t)$. On fixe un sens arbitraire du courant et un vecteur $\vec{S} = S\vec{n}$ orienté par le sens du courant (règle de la main droite).



Le **flux du champ magnétique** à travers cette surface est la grandeur **scalaire** :

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Remarque.

1. Le flux à travers un enroulement de N spires est :

$$\Phi(t) = N \times \vec{B} \cdot \vec{S}$$

2. Dans le cas où le champ magnétique n'est pas uniforme à l'échelle de la spire, on utilise :

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{B}(\mathbf{M}, t) \cdot d\vec{S}$$

on intègre sur la surface de la spire. Par exemple, sur une spire circulaire, on a :

$$\Phi = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{B}(r, \theta, t) \cdot (r dr d\theta) \vec{u}_z$$

en adoptant les coordonnées cylindriques basées sur la spire.

2.2 Loi de Faraday

Loi de Faraday. Dans un circuit électrique fermé sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ apparaît une force électromotrice égale à :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi(t)$ est le flux du champ magnétique à travers le circuit. Tout se passe comme si on y avait mis un générateur électrique idéal de force électromotrice e . e est placée en convention générateur.

Remarque.

1. C'est le signe - qui est à l'origine de la loi de Lenz.
2. Si le flux magnétique dans le circuit ne varie pas, alors il n'y a pas de force électromotrice. Pour que le flux varie, il faut une variation de $\|\vec{B}\|$, de S et/ou de l'angle entre les deux.

3 Le phénomène d'autoinduction

3.1 Flux propre

Lorsqu'un courant circule dans une bobine, il crée un champ magnétique. Ce champ créé contribue au flux magnétique total à travers le circuit et génère donc une force électromotrice d'induction.

Définition. Lors de l'étude de l'induction dans un circuit, on différencie le champ créé par ce circuit, nommé **champ propre** des champs créés par d'autres sources :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_{\text{propre}} + \vec{B}_{\text{ext}}$$

Par exemple, pour une bobine, le champ magnétique propre est celui créé par le courant que nous avons déjà vu :

$$\vec{B}_{\text{propre}}(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$$

Le champ magnétique extérieur est lié à la présence d'autres sources au voisinage (champ créé par les fils électriques par exemple).

Définition. Le **flux magnétique propre** est le flux du champ magnétique propre à travers le circuit.

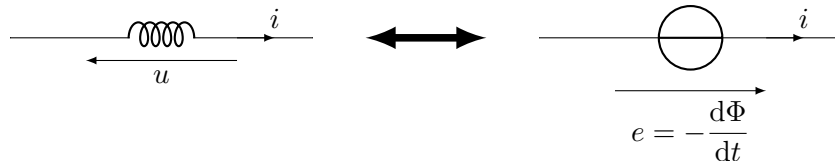
3.2 Auto-inductance

Propriété. Le flux propre peut s'exprimer comme :

$$\Phi_p(t) = L i(t)$$

où L est une constante positive nommée **inductance propre** ou **autoinductance** et s'exprime en henry (H). Elle ne dépend que de la taille et de la forme du circuit.

La loi de Faraday permet de dessiner un circuit équivalent à la bobine, en négligeant la résistance des fils :



On peut **remplacer** la bobine par une force électromotrice :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

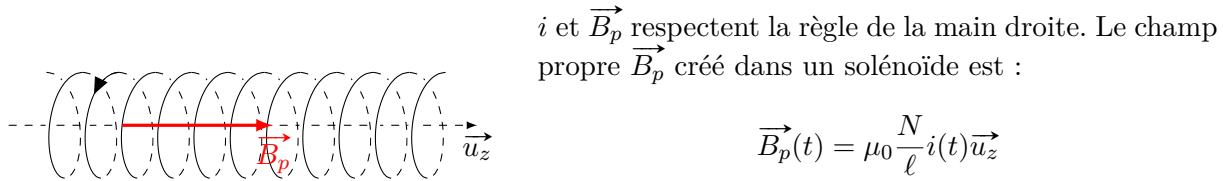
En effet, en l'absence d'autres champs $\Phi = \Phi_p = Li$. Ainsi, en convention récepteur ($u = -e$) et en l'absence de champ magnétique extérieur variable :

$$u = L\frac{di}{dt}$$

Nous avons démontré la caractéristique courant-tension d'une bobine vue en électrocinétique.

3.3 Inductance propre d'un solénoïde long

On considère une solénoïde parcouru par un courant i :



Le flux du champ magnétique à travers N spires est :

$$\Phi_p = N \times \vec{B}_p \cdot \vec{S}$$

Or $\vec{B}_p$ et $\vec{S}$ sont tous deux orientés à partir de i selon la règle de la main droite donc :

$$\vec{S} = S\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_p = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$$

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} Si(t)$$

On a démontré que le flux magnétique propre et l'intensité étaient proportionnels et que la constante de proportionnalité était positive. On identifie simplement l'inductance propre :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

Ordre de grandeur : pour une bobine de $N = 500$ spires, de surface $S = 40 \text{ cm}^2$ et de longueur $\ell = 8 \text{ cm}$ (la bobine utilisée ici) :

$$L \approx 0,16 \text{ mH}$$

On mesure $L = 10,3 \text{ mH}$. La surestimation vient du fait que proche des bords :

- le champ est plus faible (les lignes de champ s'écartent : voir chapitre EM1) ;
- l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$ n'est plus nul (les lignes de champ ne sont plus parallèles à l'axe).

Ces deux facteurs font que l'on a surestimé le flux propre donc l'inductance propre.

4 Induction mutuelle

4.1 Principe de l'inductance mutuelle

Soient deux circuits fixes indépendants électriquement, sans champ magnétique extérieur.

- Le circuit (1) est parcouru par un courant i_1 qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1$.
- De même, le circuit (2) est parcouru par un courant i_2 qui génère un champ magnétique $\vec{B}_2$.

Le champ magnétique total est :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \underbrace{\vec{B}_{\text{ext}}}_{=0}$$

Le flux magnétique total traversant le circuit (1) est donc :

$$\Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}_1 = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot \vec{S}_1 = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1$$

$$\Phi_1 = \Phi_{p,1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

Et le flux magnétique total traversant le circuit (2) est :

$$\Phi_2 = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot \vec{S}_2 = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{p,2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{p,1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

$\Phi_{p,1}$ est le flux propre du circuit (1) et $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux du champ $\vec{B}_2$ à travers le circuit (1).

$$\Phi_2 = \Phi_{p,2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

$\Phi_{p,2}$ est le flux propre du circuit (2) et $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est le flux du champ $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2).

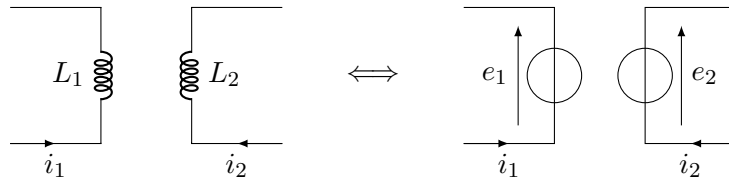
Propriété. On admet que les flux croisés sont proportionnels au courant du circuit qui génère le champ magnétique. Le coefficient de proportionnalité est le même pour les deux flux et se nomme **coefficient d'inductance mutuelle** M :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

Remarque.

- Le coefficient d'inductance mutuelle s'exprime en H.
- M peut être positif ou négatif selon le sens du circuit (au contraire de L qui est toujours positive).

Forces électromotrices.



$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_{p,1}}{dt} - \frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt}$$

Avec $\Phi_{p,1} = L_1 i_1$ et $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$:

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Pour obtenir l'expression de e_2 en fonction de i_1 et i_2 , on procède de la même façon.

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_{p,2}}{dt} - \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt}$$

Avec $\Phi_{p,2} = L_2 i_2$ et $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$:

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

4.2 Circuits électriques couplés par inductance mutuelle

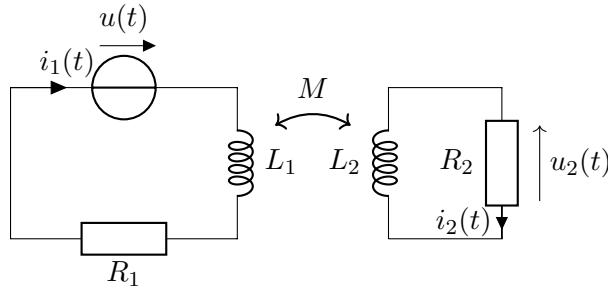
4.2.1 Méthode générale

Méthode.

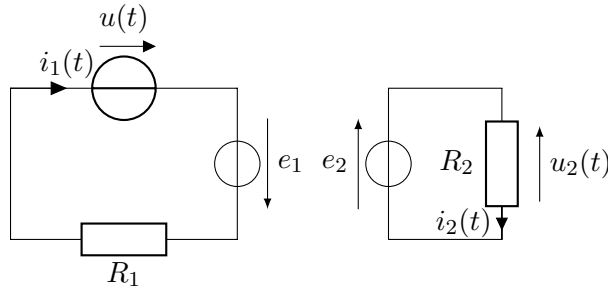
1. Flécher les courants ;
2. remplacer les inductances par leur force électromotrice en les fléchant en convention générateur ;
3. utiliser la loi de Faraday et exprimer les flux magnétiques en fonction des courants ;
4. flécher les autres dipôles, appliquer les lois de l'électrocinétique (lois des mailles, des nœuds, d'Ohm et du relation courant-tension du condensateur) pour obtenir les équations électriques ;
5. résoudre les équations obtenues.

4.2.2 Un exemple

Étudions le circuit ci-dessous. On note L_1 et L_2 les inductances propres des deux bobines et M leur inductance mutuelle (qui sont des paramètres du problème). On choisit i_1 de sorte que le générateur soit fléché en convention générateur. Il n'y a pas de préférence pour le sens de i_2 (selon sa direction M sera positif ou négatif).



Circuit équivalent. On remplace les bobines par des générateurs, fléchés en convention générateur (à partir du sens de i_1 et i_2), de forces électromotrices $e = -d\Phi/dt$:



Flux magnétiques et forces électromotrices. Sur le circuit 1 :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{donc} \quad e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Sur le circuit 2 :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad \text{donc} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Équations électriques. Sur le circuit 1 :

$$u + e_1 = R_1 i_1$$

Sur le circuit 2 :

$$e_2 = R_2 i_2$$

Équations couplées. Sur le circuit 1 :

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u$$

Sur le circuit 2 :

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

On remarque qu'en l'absence de couplage ($M = 0$), on retrouve les équations d'un circuit RL.

On peut résoudre ces équations selon la forme de la tension $u(t)$. Le programme officiel propose l'étude en régime sinusoïdal forcé.

$$\begin{cases} (R_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 = \underline{U} \\ (R_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 = 0 \end{cases}$$

Ces équations permettent ensuite d'obtenir le comportement fréquentiel du circuit.

Bilan de puissance. Multiplions la première équations par i_1 :

$$R_1 i_1^2 + L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 = u i_1$$

Et la seconde par i_2 :

$$R_2 i_2^2 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2 = 0$$

Nous obtenons :

$$R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} i_2 = u i_1$$

$$R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) = u i_1$$

On met ainsi en évidence :

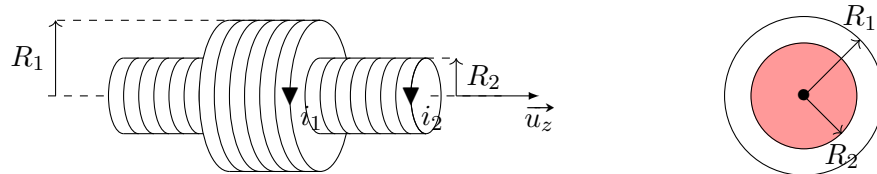
- $\mathcal{P}_J = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$ la puissance reçue par la résistance interne du circuit (dissipée par effet Joule) ;
- $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1(t) i_2(t)$ l'énergie magnétique stockée dans les deux circuits ;
- $\mathcal{P}_g = u(t) i_1(t)$ la puissance fournie par le générateur.

Dans le terme d'énergie magnétique :

- $L_1 i_1^2/2$ représente l'énergie magnétique emmagasinée dans le premier circuit ;
- $L_2 i_2^2/2$ représente l'énergie magnétique emmagasinée dans le second circuit ;
- $M i_1 i_2$ représente l'**énergie de couplage magnétique** entre les circuits.

4.3 Cas de deux bobines en influence magnétique

Considérons deux bobines imbriquées.



Nous allons calculer le flux du champ magnétique créé la seconde bobine dans la première $\Phi_{2 \rightarrow 1}$. Le champ magnétique créé par les bobines est uniforme au sein des bobines.

$$\begin{cases} \vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2 i_2}{\ell_2} \vec{u}_z \text{ à l'intérieur} \\ = \vec{0} \text{ à l'extérieur} \end{cases}$$

Orientons le vecteur $\vec{S}_1$, à partir de i_1 selon la règle de la main droite :

$$\vec{S}_1 = S_1 \vec{u}_z$$

Donc (le champ magnétique est créé par la bobine 2 n'est pas nul que si $R < R_1$) :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_2 i_2}{\ell_2} S_2 \times N_1 + 0 \times (S_2 - S_1) \times N_1$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{\ell_2} i_2$$

Le coefficient d'inductance mutuelle est donc :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{\ell_2}$$

Comment calculer $\Phi_{1 \rightarrow 2}$? Le problème pour un calcul direct est que les lignes de champ sortent et ne sont plus horizontales, ainsi $\vec{B}$ et $\vec{S}$ ne sont plus parallèles. Mais on sait que :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

et nous avons déjà calculé M .

Remarque : Si les deux bobines sont de même longueur et de même section, on trouve :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S$$

Or :

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} S \quad \text{et} \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} S$$

Donc :

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

On parle dans ce cas, on parle d'« influence totale ».

4.4 Quelques applications pratiques

- **Détecteur de métaux, boucles magnétiques (péages, parking).** Une bobine crée un champ magnétique et, si un morceau de métal se trouve à proximité, il se crée en son sein un courant. Ce courant crée lui-même un champ magnétique qui perturbe le circuit primaire.
- **Rechargement par induction (brosse à dents, portables).** Le chargeur est muni d'une bobine qui crée un champ qui va induire un champ dans un second circuit.
- **Chauffage par induction.**
- **Transformateur électrique.**