Complément sur la fonction exponentielle et introduction au logarithme - L'essentiel du cours

Fonction exponentielle

a) Existence

e^x existe pour tout réel x.

b) Valeurs particulières

$e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e \quad ; \quad e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

c) Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b :
$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \dfrac{1}{e^a} = e^{-a} \quad ; \quad \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Pour tout entier n, $(e^a)^n = e^{na}$

► *Exemple :* Pour tout x, $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

d) Signe de e^x

Pour tout réel x, e^x est strictement positif.

e) Limites

En $+\infty$ **:** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
En $-\infty$ **:** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

f) Dérivées

$(e^x)' = e^x \quad ; \quad (e^u)' = u'e^u$

► *Exemple :* $\left[e^{-0,5x}\right]' = -0,5\,e^{-0,5x}$

g) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- $\ln(e^x) = x \quad ; \quad e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

► *Exemples :*

$e^{\ln 6} = 6$

$e^{-\ln 4} = \dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \dfrac{1}{4}$

$e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$

$e^{\ln 2 + \ln 5} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 5} = 2 \times 5 = 10$

$e^{\ln 6 - \ln 3} = \dfrac{e^{\ln 6}}{e^{\ln 3}} = \dfrac{6}{3} = 2$

► **Remarque :**
valeurs remarquables du logarithme : $\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1$

h) Équations et inéquations

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \quad ; \quad e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- Si $b > 0$:

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$
$e^x < b \Leftrightarrow x < \ln b \quad ; \quad e^x \leqslant b \Leftrightarrow x \leqslant \ln b$
$e^x > b \Leftrightarrow x > \ln b \quad ; \quad e^x \geqslant b \Leftrightarrow x \geqslant \ln b$

► *Exemple :* $4e^{-x} - 8 = 0 \Leftrightarrow 4e^{-x} = 8 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$.
$S = \{-\ln 2\}$

Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

▶ Exercice n°1
Compléter les égalités suivantes :

a) $e^{\cdots} \times e^{5} = e^{-3}$ b) $e^{\cdots} \times e^{-4x} = e^{7x}$ c) $\dfrac{e^{\cdots}}{e^{-3}} = e^{-1}$ d) $\dfrac{e^{4x}}{e^{\cdots}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

▶ Exercice n°2
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + e^x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3e^x$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - \dfrac{1}{x}$

▶ Exercice n°3
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x^2)e^x$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3 + e^x}$
5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - e^x)^2$

▶ Exercice n°4
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $e^{x+2} = 1$
2. l'équation $e^x + 1 = 0$
3. l'équation $e^{x^2-x-11} = e$
4. l'inéquation $e^{-x} - 1 < 0$

▶ Exercice n°5
Soit f définie sur $[-10\,;+\infty[$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[-10\,;+\infty[$.

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-4x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+3}$
3. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$
4. f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ Exercice n°7
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} + \dfrac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\frac{1}{x^2}}$

▶ Exercice n°8
Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) peut-être modélisée par une fonction g de la forme $g(t) = Ae^{-Kt}$ où t est le temps écoulé en minutes depuis un instant choisi comme origine du temps et A et K sont des constantes.

1. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, la glycémie est égale à A.
2. Une étude sur un patient a montré que sa glycémie était égale à 2 à l'instant $t = 0$ et que la constante K qui lui correspond est égal à 0,016. On a donc $g(t) = 2e^{-0{,}016t}$.
   a) Déterminer la glycémie de ce patient à $t = 10$ minutes. On donnera une valeur approchée du résultat à 0,01 près.
   b) Justifier mathématiquement que g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c) Préciser $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.

▶ Exercice n°9

Compléter les équivalences suivantes :

1. $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
2. $e^x = 0{,}01 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
3. $e^{-x} = 0{,}9 \Leftrightarrow -x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
4. $e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

▶ Exercice n°10

Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^{\ln 7}$ $\quad B = e^{-\ln 5}$ $\quad C = e^{3\ln 4}$
$D = e^{\ln 5 + \ln 4}$ $\quad E = e^{-2\ln 7}$

▶ Exercice n°11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $e^x = 3$
2. l'équation $e^{x+3} = 5$
3. l'équation $3e^{-x} - 9 = 0$
4. l'inéquation $e^x \geqslant 7$
5. l'inéquation $8 - 2e^x \geqslant 0$

▶ Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$
2. En remarquant que $f(x) = e^x(e^x - 4)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 2 \geqslant 0$.
   b) Dériver f et montrer que $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$.
   c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°13

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 C. En déduire une valeur arrondie de k à 0,0001 près.
2. Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 C ?

▶ Exercice n°14

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N_0 e^{-kt}$ où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer une valeur arrondie à 0,001 près de la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N_0 = 1000$, on a $N(1) = 937$.
2. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 1000 à 500 ?
3. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 500 à 250 ?

▶ Exercice n°15

La température, en degrés celsius, d'une réaction chimique à l'instant t, en minutes, est donnée par $f(t) = (20t + 10)e^{-0{,}5t}$.

1. Donner la température initiale (celle correspondant à $t = 0$).
2. La température de la réaction peut-elle passer en dessous de 0 ?
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

▶ Exercice n°16

Le taux d'hydratation de la peau, x heures après avoir appliqué une crème solaire, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 50x\,e^{-0{,}5x+1}$.

1. En étudiant les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$, déterminer le moment où le taux d'hydratation est maximal.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 50$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $[0\,;1]$ et une autre dans l'intervalle $[5\,;5{,}5]$.
3. La crème solaire ne peut être commercialisée que si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée dépassant 6 heures. Ce critère est-il rempli ?

▶ Exercice n°17

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - e^{-0{,}39x} > 0$.
2. On admet que, pour emprunter 100 000 euros au taux annuel de 4% remboursable en t années ($t > 1$), le montant annuel à rembourser est donné (en milliers d'euros) par $f(t) = \dfrac{4}{1 - e^{-0{,}39t}}$.
   a) Quelle est le montant annuel à rembourser si l'emprunt doit être remboursé sur 10 ans ? sur 15 ans ?
   b) Justifier que la fonction f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
   c) Justifier que le montant annuel à rembourser est toujours supérieur à 4 000 euros.

Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

▶ Exercice n°1

a) $e^{-8} \times e^{5} = e^{-3}$ b) $e^{11x} \times e^{-4x} = e^{7x}$ c) $\dfrac{e^{-4}}{e^{-3}} = e^{-1}$ d) $\dfrac{e^{4x}}{e^{-7x}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

▶ Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3e^x = -\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x \times \dfrac{1}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - \dfrac{1}{x} = 0$

▶ Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$
2. $f'(x) = \dfrac{2x \times e^x - x^2 \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(2x - x^2) \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$
3. $f'(x) = -2x \times e^x + (1 - x^2) \times e^x = (-2x + 1 - x^2)e^x$
4. $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(3 + e^x)^2}$
5. $f'(x) = 2 \times (-e^x)(1 - e^x) = -2e^x(1 - e^x)$

▶ Exercice n°4

1. $e^{x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $S = \{-2\}$.
2. $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$. Impossible. $S = \varnothing$
3. $e^{x^2-x-11} = e \Leftrightarrow e^{x^2-x-11} = e^1 \Leftrightarrow x^2 - x - 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.
   $\Delta = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. $S = \{-3 ; 4\}$.
4. $e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0 ; +\infty[$.

▶ Exercice n°5

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) = 2 \times e^x + 2x \times e^x = (2x+2)e^x$.

x	-10		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-20e^{-10}$	↘	$-2e^{-1}$	↗	$+\infty$

▶ Exercice n°6

1. $f'(x) = -4\,e^{-4x}$
2. $f'(x) = 2x\,e^{x^2+3}$
3. $f'(x) = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x^2} e^{1-\frac{1}{x}}$
4. $f'(x) = \dfrac{3 \times (x+1) - 3x \times 1}{(x+1)^2} e^{\frac{3x}{x+1}} = \dfrac{3}{(x+1)^2} e^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ Exercice n°7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$.
   Comme d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} + \dfrac{1}{x} + \infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

▶ Exercice n°8

1. On a $g(0) = Ae^0 = A$.
2. a) $g(10) \approx 1{,}70$.
   b) $g'(t) = 2 \times (-0{,}016)\,e^{-0{,}016t} = -0{,}032\,e^{-0{,}016t}$ qui est toujours strictement négatif, car un exponentiel est toujours strictement positif.
   c) $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}016t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

▶ Exercice n°9

Compléter les équivalences suivantes :

1. $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$
2. $e^x = 0{,}01 \Leftrightarrow x = \ln(0{,}01)$
3. $e^{-x} = 0{,}9 \Leftrightarrow -x = \ln(0{,}9) \Leftrightarrow x = -\ln(0{,}9)$
4. $e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln 3$

▶ Exercice n°10

$A = e^{\ln 7} = 7$

$B = e^{-\ln 5} = \dfrac{1}{e^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$

$C = e^{3\ln 4} = \left(e^{\ln 4}\right)^3 = 4^3 = 64$

$D = e^{\ln 5 + \ln 4} = e^{\ln 5} \times e^{\ln 4} = 5 \times 4 = 20$

$E = e^{-2\ln 7} = \dfrac{1}{e^{2\ln 7}} = \dfrac{1}{\left(e^{\ln 7}\right)^2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$

▶ Exercice n°11

1. $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$.
2. $e^{x+3} = 5 \Leftrightarrow x + 3 = \ln 5 \Leftrightarrow x = -3 + \ln 5$. $S = \{-3 + \ln 5\}$.
3. $3e^{-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 3 \Leftrightarrow -x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3$. $S = \{-\ln 3\}$.
4. $e^x \geqslant 7 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 7$. $S = [\ln 7\,;\, +\infty[$.
5. $8 - 2e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 \geqslant e^x \Leftrightarrow \ln 4 \geqslant x$. $S =]-\infty\,;\, \ln 4]$.

▶ Exercice n°12

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3. La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.
4. a) $e^x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 2$. $S = [\ln 2\,;\, +\infty[$.

   b) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x\left(e^x - 2\right)$.

   c)

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$2\,e^x$		$+$	|	$+$	
$e^x - 2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^2 - 4 \times 2 = 2^2 - 8 = -4$

▶ Exercice n°13

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On doit avoir $\theta(120) = 20 \Leftrightarrow 8 + 17e^{120k} = 20 \Leftrightarrow e^{120k} = \dfrac{12}{17}$
   $\Leftrightarrow 120k = \ln\left(\dfrac{12}{17}\right) \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{120} \times \ln\left(\dfrac{12}{17}\right) \approx -0{,}0029$
2. On cherche t tel que $8 + 17e^{-0{,}0029t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0{,}0029t} = \dfrac{7}{17}$
   $\Leftrightarrow -0{,}0029t = \ln\left(\dfrac{7}{17}\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{-1}{0{,}0029} \times \ln\left(\dfrac{7}{17}\right) \approx 306$ secondes.

▶ Exercice n°14

1. On cherche k tel que $1000\,e^{-k\times 1} = 937 \Leftrightarrow e^{-k} = \dfrac{937}{1000} \Leftrightarrow -k = \ln(0{,}937)$
   $\Leftrightarrow k = -\ln(0{,}937) \approx -0{,}065$.
2. Cela revient à chercher t_1 tel que $N(t_1) = 500 \Leftrightarrow 1000\,e^{-0{,}065t_1} = 500$
   $\Leftrightarrow e^{-0{,}065t_1} = 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}065t_1 = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}065} \approx 10{,}7$ heures.
3. Cela revient à chercher t_2 tel que $N(t_1 + t_2) = 250 \Leftrightarrow 1000\,e^{-0{,}065(t_1+t_2)} = 250$
   $\Leftrightarrow 1000\,e^{-0{,}065t_1 - 0{,}065t_2} = 250 \Leftrightarrow 1000\,e^{-0{,}065t_1} \times e^{-0{,}065t_2} = 250$
   Or, $1000\,e^{-0{,}065t_1} = 500$. On cherche donc t_2 tel que $500 \times e^{-0{,}065t_2} = 250$
   $\Leftrightarrow e^{-0{,}065t_2} = 0{,}5$. On a donc $t_2 = t_1 \approx 10{,}7$ heures.

▶ Exercice n°15

1. $f(0) = 10\,e^0 = 10$.
2. Non, car un exponentiel est toujours strictement positif. De plus $20t + 10$ reste positif car $t \geqslant 0$.

3. $f'(t) = 20 \times \mathrm{e}^{-0,5t} + (20t+10)\left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5t}\right) = 20\,\mathrm{e}^{-0,5t} - 10t\,\mathrm{e}^{-0,5t} - 5\,\mathrm{e}^{-0,5t}$
$= (15-10t)\mathrm{e}^{-0,5t}$

t	0		$1,5$		$+\infty$
$15-10t$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,5t}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	10	$\nearrow$	$40\,\mathrm{e}^{-0,75}$	$\searrow$	

▶ Exercice n°16

1. $f'(x) = 50\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 50x\left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x+1}\right) = 50\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} - 25x\,\mathrm{e}^{-0,5x+1}$
$= (50-25x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}$

x	0		2		$+\infty$
$50-25x$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,5x+1}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	

Le taux d'hydratation sera maximal au bout de 2 heures.

2.
   - f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ et 50 est bien compris entre $f(0)=0$ et $f(1)\approx 82{,}4$.
   - f est continue et strictement décroissante sur $[5\,;\,5{,}5]$ et 50 est bien compris entre $f(5)\approx 55{,}8$ et $f(5{,}5)\approx 47{,}8$.

3. Non, car d'après la question précédente le taux d'hydratation dépassera 50% sur un intervalle d'amplitude nécessairement inférieure à 5,5 heures.

▶ Exercice n°17

1. $1-\mathrm{e}^{-0,39x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \mathrm{e}^{-0,39x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0} > \mathrm{e}^{-0,39x} \Leftrightarrow 0 > -0{,}39x \Leftrightarrow x > 0$.
$S =]0\,;\,+\infty[$.

2. a)
   - sur 10 ans : 4082,64 euros car $f(10)\approx 4{,}08264$
   - sur 15 ans : 4011,55 euros car $f(15)\approx 4{,}01155$

   b) $f'(t) = 4 \times \left(\dfrac{-\left(-\left(-0{,}39\,\mathrm{e}^{-0,39t}\right)\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)^2}\right) = \dfrac{-1{,}56\,\mathrm{e}^{-0,39t}}{\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)^2}$.
   Le carré et l'exponentiel restant positif, $f'(t)$ reste négative sur $[1\,;\,+\infty[$.

   c) Pour tout $t \geqslant 1$:
   $f(t)-4 = \dfrac{4-4\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)}{1-\mathrm{e}^{-0,39t}} = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-0,39t}}{1-\mathrm{e}^{-0,39t}}$.
   Le numérateur est positif à cause de l'exponentiel et le dénominateur est aussi positif d'après la question 1. On peut en conclure que $f(t)-4$ reste toujours positif et donc que $f(t)$ est toujours supérieur à 4 milliers d'euros.