Divisibilité et congruence

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que b **divise** a s'il existe un entier relatif k tel que $a = k \times b$.
On note alors $b|a$.

Remarques

On dit aussi que b est un diviseur de a, ou que a est divisible par b ou encore que a est un multiple de b.

Exemples

Les diviseurs de 45 dans $\mathbb{Z}$ sont -45 ; -1 ; 45 ; 1 ; 15 ; 3 ; -15 ; -3 ; 9 ; 5 ; -9 et -5.
On peut donc dire que 45 est un multiple de -3.
On peut aussi dire que -5 divise 45 ou que 45 est divisible par -5.

L'ensemble des multiples de 5 est $\{... ; -20 ; -15 ; -10 ; -5 ; 0 ; 5 ; 10 ; ...\}$. Cet ensemble est aussi noté $5\mathbb{Z}$.

Propriétés

- 0 est un multiple de tout nombre entier. On peut aussi dire que 0 est divisible par n'importe quel nombre entier.
- 1 divise tout nombre entier.
- Deux entiers relatifs opposés ont les mêmes diviseurs.

Propriété : transitivité

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise b et que b divise c alors a divise aussi c.

Démonstration

Puisque a divise b, il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.
Puisque b divise c, il existe un entier relatif k' tel que $c = k'b$.
Avec ces deux égalités, on peut écrire $c = k'b = k'ka$. Or kk' est un entier relatif, que l'on peut noter λ. On a donc trouvé un entier relatif tel que $c = \lambda a$. Ainsi, a divise c.

Propriété : combinaison linéaire

Soient a, b et c trois entiers relatif.
Si a divise b et si a divise c, alors a divise toute combinaison linéaire de b et c.
On peut ainsi noter :

$$a|b \text{ et } a|c \Rightarrow \forall(u\,;\,v) \in \mathbb{Z}^2,\ a|ub+vc.$$

Démonstration

Puisque a divise b et c, il existe deux relatifs k et k' tels que : $b = ka$ et $c = k'a$.
Ainsi, $ub + vc = u(ka) + v(k'a) = a(uk + vk')$. Or le nombre $uk + vk'$ est un entier relatif. On a donc trouvé un entier relatif $\lambda = uk + vk'$ tel que $ub + vc = \lambda a$.
Cela signifie que a divise $ub + vc$.

2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème

Pour tout entier naturel a et pour tout entier naturel b non nul, il existe un unique couple d'entiers naturels $(q\,;\,r)$ tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

Définitions

Dans le précédent théorème, q est appelé le **quotient** de la **division euclidienne** de a par b et r et son **reste**.

Démonstration

Montrons d'abord l'existence.

Supposons que $b \leqslant a$. Notons E l'ensemble des multiples de b strictement supérieurs à a. E est non vide puisque $2b \times a$ appartient à E.
Or, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
E possède donc un plus petit élément, c'est à dire un multiple de b strictement supérieur à a tel que le multiple précédent soit inférieur ou égal à a.

Il existe donc un entier q tel que $qb \leqslant a < (q+1)b$.
Puisque $b \leqslant a$, on a $b \leqslant a < (q+1)b$. Puisque $b > 0$, on a également $0 < (q+1)b$ ce qui implique $0 < q$.
On peut alors poser $r = a - bq$. Puisque a, b et q sont des entiers, r l'est également.
Puisque $qb \leqslant a$, on a $r \geqslant 0$ donc r est un entier naturel.
Enfin, puisque $a < (q+1)b$ on en déduit que $r < b$.

Démonstration : suite et fin

Montrons maintenant l'unicité.

Supposons que $a = bq_1 + r_1$ et que $a = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$.
On a donc $-b < r_1 - r_2 < b$ et $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$.
Cela implique que $r_1 - r_2$ est un multiple de b strictement compris entre $-b$ et b.
Cela implique donc que $r_1 - r_2 = 0$, autrement dit que $r_1 = r_2$.
Puisque $b \neq 0$, $q_1 = q_2$ montant ainsi l'unicité du couple $(q\,;\,r)$.

Théorème

On peut étendre ces résultat à $\mathbb{Z}$:
Pour tout entier relatif a et pour tout entier entier naturel b non nul, il existe un unique couple $(q\,;\,r)$ d'entiers relatifs tels que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b$$

Exemples

- Effectuons la division euclidienne de 534 par 5.

$$\begin{array}{r|l}
-\;534 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{5} & 106 \\
-\;03 & \\
\underline{0} & \\
-\;34 & \\
\underline{30} & \\
4 &
\end{array}$$

  On peut donc écrire que $534 = 5 \times 106 + 4$.

- La division euclidienne de 114 par 8 donnera $114 = 8 \times 14 + 2$.
  On a également $-114 = -8 \times 14 - 2$ Mais -2 ne peut pas être un reste de division euclidienne car non positif.
  Mais $-114 = 8 \times (-14) - 8 + 6 = 8 \times (-15) + 6$.

3 Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit n un entier naturel non nul. Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que a **est congru à b modulo** n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On note alors $a \equiv b\ (n)$.

On dit aussi que a et b sont **congrus modulo** n.

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b\ (n)$ alors $a - b$ est divisible par n.
- Si $a \equiv 0\ (n)$ alors a est divisible par n.
- Si $a \equiv b\ (n)$ et si $b \equiv c\ (n)$ alors $a \equiv c\ (n)$. (transitivité)
- Si $a \equiv b\ (n)$ alors $b \equiv a\ (n)$.

Démonstration

- Si $a \equiv b\ (n)$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n. On peut donc utiliser la définition de la division euclidienne et écrire que $a = nq + r$ et $b = nq' + r$ avec $0 \leqslant r < n$.
  On obtient ainsi $a - b = n(q - q')$ avec $q - q'$ un entier donc n divise $a - b$.

  Réciproquement, si $n|a - b$ alors il existe un entier k tel que $a - b = kn$ ou encore $a = b + kn$.
  Notons r le reste de la division euclidienne de b par n :
  $b = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$ donc $a = nq + r + kn = n(q + k) + r$.
  Cette dernière égalité veut dire que r est le reste de la division euclidienne de a par n.
  Puisque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n, ils sont congrus modulo n.

- Il s'agit d'un cas particulier de ce que l'on vient de montrer en posant $b = 0$.

- D'après le premier point, n divise $a - b$ et n divise $b - c$ donc il divise leur somme $a - c$ et donc $a \equiv c\ (n)$.

- Immédiat

Exemples

- $31 \equiv 10\ (7)$.
  En effet, $31 - 10 = 21$ qui est divisible par 7.

- $8 \equiv -7\ (3)$
  En effet, $8 - (-7) = 15$ qui est un multiple de 3.

Propriétés

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs quelconques et soit n en entier naturel non nul.
Si $a \equiv b\ (n)$ et si $c \equiv d\ (n)$ alors :

- $a + c \equiv b + d\ (n)$
- $ac \equiv bd\ (n)$

La relation de congruence est compatible avec l'addition et la multiplication.

Démonstration

Si $a \equiv b\ (n)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kn$ ou encore $a = kn + b$.
Si $c \equiv d\ (n)$ alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c - d = k'n$ ou encore $c = kn + d$.

Ainsi $a + c = kn + b + k'n + d = n(k + k') + b + d$.
Or $n(k + k') + b + d \equiv b + d\ (n)$. Ainsi, $a + c \equiv b + d\ (n)$.

La démonstration est similaire pour la multiplication.

Propriétés : conséquences

Soit n un entier naturel non nul et soient a et b deux entiers relatifs.

- Pour tout entier relatif k, si $a \equiv b\ (n)$ alors $a + k \equiv b + k\ (n)$.
- Pour tout entier relatif k, si $a \equiv b\ (n)$ alors $ka \equiv kb\ (n)$.
- Pour tout entier naturel non nul p, si $a \equiv b\ (n)$ alors $a^p \equiv b^p\ (n)$.

Démonstration

Pour les deux premiers points, il suffit d'appliquer les précédentes propriétés en posant $b = k$.

Montrons la troisième conséquence par récurrence sur l'entier p.

Initialisation

Pour $p = 0$, la formule est vérifiée de façon triviale.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel p supérieur ou égal à 0, la propriété soit vraie.
$a^{k+1} \equiv a^k \times k \equiv b^k \times b \equiv b^{k+1}\ (n)$
La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $p = 0$ et héréditaire à partir de cet entier. La propriété est donc vraie pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 0.

Remarque

La réciproque est fausse !
$6 \times 5 \equiv 6 \times 2\ (2)$ mais 5 et 2 ne sont pas congrus modulo 2.
De même, $5^2 \equiv 2^2\ (7)$ mais 5 et 2 ne sont pas congrus modulo 7.

Exercices sur les congruences

> Division euclidienne, multiples et diviseurs

Exercice n°1

1. Effectuer la division euclidienne de -31 par 4.
2. Effectuer la division euclidienne de -19 par 4.
3. Effectuer la division euclidienne de $-5\ 000$ par 17.

Exercice n°2 Soit n un entier relatif.

1. Montrer que $6n + 5$ n'est pas divisible par 5.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n + 5$ divise $n - 1$.

Exercice n°3 Soit n un entier naturel.

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $5n + 11$ par $2n + 3$.

Exercice n°4 On souhaite déterminer les entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ soit un entier.

1. Montrer que si n est solution alors $n + 2$ divise 33.
2. Etablir la liste des diviseurs de 33 dans $\mathbb{Z}$.
   En déduire les valeurs possibles de n.
3. Conclure quant au problème initial de l'exercice.

Exercice n°5

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.
2. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 3 vaut 1.
3. Soit n un entier naturel.
   Montrer que $4 \times 10^n - 1$ est divisible par 3.

> Notion de congruence

Exercice n°6 Vérifier les égalités suivantes :

a. $15 \equiv 27\ (3)$ **b.** $17 \equiv 11\ (4)$ **c.** $37^4 \equiv 1\ (4)$

Exercice n°7

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^6 par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{6p} par 7 où p est un entier naturel non nul.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 33^{38} par 7.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{437} par 7.

Exercice n°8

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009\ (16)$.

Exercice n°9

1. Vérifier que $100 \equiv 1\ (11)$.
2. En déduire que $10^4 \equiv 1\ (11)$.
3. En déduire que $10^3 \equiv -1\ (11)$ et que $10^5 \equiv -1\ (11)$.
4. Montrer que 3 729 est divisible par 11.
5. Montrer que 9 240 est divisible par 11.
6. Etudier la divisibilité de 197 277 par 11.

Exercice n°10

On se donne deux entiers A = 8 387 592 115 et B = 9 276 312 516.

1. Montrer que 1 000 est divisible par 8.
2. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
3. Déterminer l'entier naturel $b < 8$ tel que $\mathrm{B} \equiv b\ (8)$.
4. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à A + B et à A × B.

Exercice n°11

1. Déterminer les entiers x tels que $6 + x \equiv 5\ (3)$.
2. Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 5\ (3)$.

Exercice n°12

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1\ (4)$.
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4 la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice n°13

1. Le nombre $A = 1305^{1305} + 900^{900}$ est-il divisible par 29 ?
2. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Sachant que $(n-1) \equiv -1\ (n)$, calculer le reste de la division euclidienne de 27^{2012} par 7.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 1 000 par 37 ?
4. En déduire que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 37 est égal à 1.
5. Quel est le reste de la division euclidienne de $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37 ?

Exercice n°14

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 5\ (7)$.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7 ?
2. En déduire les restes possibles de la division euclidienne de $3x$ par 7.
3. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation ?

Correction des exercices sur les congruences

> Division euclidienne, multiples et diviseurs

Exercice n°1

1. $-31 = -8 \times 4 + 1$ (le reste doit être compris entre 0 et 3).
2. $-19 = -5 \times 4 + 1$ (le reste doit être compris entre 0 et 4).
3. $-5000 = 17 \times (-295) + 15$.

Exercice n°2

1. On utilise un raisonnement par l'absurde.
   Supposons qu'il existe un entier relatif n tel que $6n + 5$ soit divisible par 5.
   Il existe alors un entier relatif k tel que $6n + 5 = 3k$. On obtient alors $5 = 3(k - 2n)$.
   Cela implique que 5 est un multiple de 3, ce qui n'est pas vrai. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $6n + 5$ n'est pas divisible par 3.

2. Si $2n + 5$ divise $n - 1$, par combinaison linéaire, $2n + 5$ divise $-2(n - 1) + 2n + 5$ soit $2n + 5$ divise 7. (on fabrique une combinaison linéaire de $n - 1$ et de $2n + 5$ dont le résultat ne dépend plus de n).
   Les diviseurs de 7 sont -7, -1, 7 et 1.
   On a donc 4 possibilités : $2n + 5 = -7$ et donc $n = -6$.
   Ou alors $2n + 5 = 7$ et donc $n = 1$, ou bien $2n + 5 = -1$ et donc $n = -3$ ou encore $2n + 5 = 1$ et donc $n = -2$.

   Vérifions :
   Si $n = -6$ alors $2n + 5 = -7$ et $n - 1 = -7$. Or $-7| - 7$ donc $n = -6$ est bien solution.
   Si $n = 1$ alors $2n + 5 = 7$ et $n - 1 = 0$. Or $7|0$ donc -1 est bien solution.
   Si $n = -3$ alors $2n + 5 = -1$ et $n - 1 = -4$. Or $-1| - 4$ donc -3 est bien solution.
   Si $n = -2$ alors $2n + 5 = 1$ et $n - 1 = -3$. Or $1| - 3$ donc -2 est bien solution.

Exercice n°3

$5n + 11 = 2(2n + 3) + n + 5$.
Le quotient est donc 2 et le reste est $n + 5$. Il faut cependant que $0 \leqslant n + 5 < 2n + 3$, c'est à dire que $n \geqslant 3$.
Regardons pour les valeurs entières de n de 0 à 2.

n	$5n + 11$	$2n + 3$	quotient	reste
0	11	3	3	2
1	16	5	3	1
2	21	7	3	0

Exercice n°4

1. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-2\}$ une solution.

   Le nombre $\dfrac{2n-29}{n+2}$ est un entier relatif si et seulement si $n+2$ divise $2n-29$.
   Puisque $n+2$ divise aussi $2(n+2)$, il faut que $n+2$ divise $2(n+2)-(2n-29)=33$.

2. Les seuls diviseurs de 33 sont -1, -33, 1, 3, -3, 11, -11 et 33. Ces valeurs sont les seuls possibles pour $n+2$ donc les valeurs possibles de n sont -3, -35, -1, 1, -5, 9, -13 et 31.

3. Il faut donc maintenant tester toutes ces valeurs dans le quotient $\dfrac{2n-29}{n+2}$ et vérifier que les résultats sont des entiers relatifs.
   C'est le cas.

Exercice n°5

1. $100 = 33 \times 3 + 1$. Le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3 est 1.

2. **Initialisation**

   Pour $n = 0$, $10^0 = 1$ et le reste de la division euclidienne de 1 par 3 est bien 1.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, la propriété soit vraie.
   Il existe donc un entier naturel k tel que $10^n = 3k + 1$.
   $10^n \times 10 = (3k+1) \times 10$
   $\Leftrightarrow \quad 10^{n+1} = 10k \times 3 + 10$
   $\Leftrightarrow \quad 10^{n+1} = 10k \times 3 + 9 + 1$
   $\Leftrightarrow \quad 10^{n+1} = 3(10k+3) + 1.$
   On vient de montrer que le reste de 10^{n+1} dans la division euclidienne par 3 est 1. La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

3. D'après la question précédente, il existe un entier naturel k tel que $10^n = 3k + 1$.
   $\Leftrightarrow \quad 4 \times 10^n = 4(3k+1)$
   $\Leftrightarrow \quad 4 \times 10^n = 12k + 4$
   $\Leftrightarrow \quad 4 \times 10^n - 1 = 12k + 4 - 1$
   $\Leftrightarrow \quad 4 \times 10^n - 1 = 3(4k+1).$

   L'entier $4 \times 10^n - 1$ est bien un multiple de 3.

> Notion de congruence

Exercice n°6

a. $15 - 27 = -12$ qui est un multiple de 3 dans $\mathbb{Z}$. Donc $15 \equiv 27\ (3)$.

b. $17 - 11 = 6$ qui n'est pas un multiple de 4. La relation est donc fausse.

c. $37 = 9 \times 4 + 1$. Ainsi, $37 \equiv 1\ (4)$ et $37^4 \equiv 1^4 \equiv 1\ (4)$.

Exercice n°7

1. $5^6 \equiv (5^2)^3 \equiv 25^3 = (3 \times 7 + 4)^3 \equiv 4^3 \equiv 64\ (7)$
   Or $64 = 9 \times 7 + 1$ donc $5^6 \equiv 1\ (7)$.

2. $5^{6p} = (5^6)^p \equiv 1^p \equiv 1\ (p)$.

3. $33^{38} = (4 \times 7 + 5)^{36+2} \equiv 5^{36} \times 5^2 \equiv 1 \times 25 \equiv (3 \times 7 + 4) \equiv 4\ (7)$.

4. $2^{437} \equiv 2^{3\times145+2} \equiv (2^3)^{145} \times 2^2 \equiv 1^{145} \times 4 \equiv 4\ (7)$.

Exercice n°8

1. $2009^2 \equiv (125 \times 16 + 9)^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 5 \times 16 + 1 \equiv 1\ (16)$.

2. $2009^{8001} \equiv 2009^{2\times4000+1} \equiv 2009^{2\times4000} \times 2009 \equiv 1^{4000} \times 2009 \equiv 2009\ (16)$.

Exercice n°9

1. $100 = 9 \times 11 + 1$. Donc $100 \equiv 1\ (11)$.

2. $100^4 \equiv 100^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (11)$.

3. On a $10 - (-1) = 11$. On a donc $10 \equiv -1\ (11)$.
   $10^3 \equiv -1 \times (-1) \times (-1) \equiv -1\ (11)$ et de même, $10^5 \equiv -5\ (11)$.

4. $3729 \equiv 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \equiv 3 \times (-1) + 7 \times 1 + 2 \times (-1) + 9 \equiv 0\ (11)$.
   Donc 3 729 est bien divisible par 11.

5. $9240 \equiv 9 \times 1000 + 2 \times 100 + 4 \times 10 \equiv 9 \times (-1) + 2 \times 1 + 4 \times (-1) \equiv -11 \equiv 0\ (11)$.
   Donc 9 240 est bien divisible par 11.

6. En décomposant de la même façon, on montre que $197\ 277 \equiv 3\ (11)$ et donc n'est pas un multiple de 11.

Exercice n°10

1. $8 \times 125 = 1\ 000$. Donc $1\ 000$ est bien divisible par 8.

2. $\text{A} = 8387592 \times 1000 + 115$.
   Donc $\text{A} \equiv 8387592 \times 1000 + 115 \equiv 115 \equiv 14 \times 8 + 3 \equiv 3\ (8)$.

3. $\text{B} = 9276312 \times 1000 + 516$.
   Donc $\text{B} \equiv 9276312 \times 1000 + 516 \equiv 516 \equiv 64 \times 8 + 4 \equiv 4\ (8)$.

4. $\text{A} + \text{B} \equiv 3 + 4 \equiv 7\ (8)$ et $\text{A} \times \text{B} \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 4\ (8)$.

Exercice n°11

1. $$\begin{aligned} &6 + x \equiv 5\ (3) \\ &6 + x - 6 \equiv 5 - 6\ (3) \\ &x \equiv -1\ (3) \\ &x \equiv 2\ (3). \end{aligned}$$

   Les entiers x solutions sont donc de la forme $2 + 3k$ où k est un entier relatif.

2. Cela revient à $3x \equiv 1\ (4)$.
   x modulo 4 est égal à $0\,;\,1\,;\,2$ ou 3.
   Donc $3x$ modulo 4 est égal à $0\,;\,3\,;\,2$ ou 1.

   Donc $3 \times 3 \equiv 1\ (4)$. Ainsi, $x \equiv 3\ (4)$.
   Les entier x solutions sont donc de la forme $3 + 4k$ avec k un entier relatif.

Exercice n°12

1. $(n+3)^4 = n^4 + 12n^3 + 54n^2 + 108n + 81$, en utilisant la formule du binôme de Newton.

2. $12 \equiv 0\ (4)$, $54 \equiv 13 \times 4 + 2 \equiv 2\ (4)$, $108 \equiv 4 \times 27 \equiv 0\ (4)$ et $81 \equiv 20 \times 4 + 1 \equiv 1\ (4)$.
   Ainsi, $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1\ (4)$.

3. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 4 :

r	0	1	2	3
$r^4 + 2r^2 + 1$	1	4	25	100
$(n+3)^4$ modulo 4	1	0	1	0

   Ainsi, $(n+3)^4$ est divisible par 4 si et seulement si n est un nombre impair.

Exercice n°13

1. $1305 = 45 \times 29$ donc $1305 \equiv 0\ (29)$.
   Ainsi, $1305^{1305} \equiv 0\ (29)$.

   $900 = 31 \times 29 + 1$ donc $900 \equiv 1\ (29)$.
   Donc $900^{900} \equiv 1^{900} \equiv 1\ (29)$.

   Par somme, on a $1305^{1305} + 900^{900} \equiv 1\ (29)$.
   Cela signifie que A n'est pas divisible par 29.

2. $27 = 3 \times 7 + 6$ donc $27 \equiv 6\ (7)$.
   Or $6 \equiv -1\ (7)$ donc $27 \equiv -1\ (7)$.
   Puis $27^{2012} \equiv (-1)^{2012} \equiv 1\ (7)$.
   Le reste de la division euclidienne de 27^{2012} par 7 est 1.

3. $1000 = 27 \times 37 + 1$. Le reste vaut 1.

4. $10^3 \equiv 1\ (37)$.
   Donc $10^{3n} \equiv 1\ (37)$.

5. $10^{10} \equiv 10^9 \times 10 \equiv (10^3)^3 \times 10 \equiv 1 \times 10 \equiv 10\ (37)$.
   De la même façon, on montre que $10^{20} \equiv 100\ (37)$.
   Enfin, $10^{30} \equiv (10^3)^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1\ (37)$.

   Finalement, $N \equiv 10 + 100 + 1 \equiv 111 \equiv 3 \times 37 \equiv 0\ (37)$.

Exercice n°14

1. Les restes possibles sont les entiers 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

2. En multipliant ces restes par 3, on obtient ainsi les nombres 0 ; 3 ; 6 ; 2 ; 5 ; 1 et 4.

3. Ainsi, $3x \equiv 5\ (7) \Leftrightarrow x \equiv 4\ (7)$.
   Les solutions sont donc les entiers de la forme $4 + 7k$ où k est un entier relatif.