

Feuille d'exercices 15

Polynômes

— **Exercice 1** ●○○ — **Equations sur des polynômes** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
2. $(P')^2 = 4P$.
3. $(X^2 + 1)P'' = 6P$

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P pour les deux premières, et le coefficient dominant pour le troisième.

— **Exercice 2** ●○○ — **Interpolation et contraintes** Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connaît P , ainsi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?

Correction :

Détails :

On écrit la formule de Taylor pour P en 2, à l'ordre 3. Comme P est de degré au plus 3, on sait que le reste de la formule de Taylor est nul :

$$P(X) = \sum_{k=0}^3 \frac{P^{(k)}(2)}{k!} (X-2)^k = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(X-2)^3$$

Ainsi, si un tel polynôme existe, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} P(X) &= 5 + 6(X-2) - \frac{8}{2}(X-2)^2 - \frac{18}{6}(X-2)^3 \\ &= 5 + 6(X-2) - 4(X-2)^2 - 3(X-2)^3 \end{aligned}$$

On vérifie que la condition $P(3) = 4$ est bien vérifiée par ce polynôme. Ainsi, il y a bien un polynôme qui vérifie ces contraintes, et il est unique.

Remarque : on n'a pas besoin d'explicitier les coefficients de P . En fait, on a donné ses coefficients (coordonnées) dans la base de polynômes échelonnés

$$(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3).$$

On peut retenir que la formule de Taylor permet d'écrire un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base "translatée" $(1, (X-\lambda), \dots, (X-\lambda)^n)$, et que les coefficients se trouvent à partir des dérivées en λ .

— **Exercice 3** ●●○ — **Une équation de polynôme** Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - P' = X^n$. Si oui, les déterminer.

Correction : Soit une solution P , il est clair que $\deg(P) = n$. En l'absence d'idée, on raisonne frontalement, et on cherche P sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a alors, en effectuant un glissement d'indice dans l'expression de P' :

$$\begin{aligned} P - P' &= \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1) a_{k+1}) X^k + a_n X^n \end{aligned}$$

Ainsi, par identification des coefficients, le polynôme P est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : a_k - (k+1) a_{k+1} = 0 \\ a_n = 1 \end{cases}$$

La suite des coefficients est ainsi définie par récurrence descendante, en notant que la relation est compatible pour $k = 0$:

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : a_k = (k+1) a_{k+1} \\ a_n = 1 \end{cases}$$

On trouve que :

$$a_n = 1, \quad a_{n-1} = n, \quad a_{n-2} = n(n-1), \quad \dots, \quad a_0 = n!$$

Une formule pour (a_k) est :

$$a_k = \frac{n!}{k!},$$

et ainsi, on trouve une unique solution :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} X^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

Exercice 4 ●●○ — Factorisation(s)

Factoriser $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Idée : Dans $\mathbb{C}$, vous savez factoriser $a^2 + b^2$.

Correction : On a l'identité $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ et donc :

$$(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2 = (X^2 - (3 - i)X + 2)(X^2 - (3 + i)X + 2).$$

Il reste à factoriser ces trinômes sur $\mathbb{C}$ en cherchant leur racines complexes. C'est l'occasion de réviser. Une fois les calculs terminés, on observe que les racines complexes vont par paires conjuguées, et on les regroupe pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, comme dans le cours.

Exercice 5 ●●○ — Divisions euclidiennes

Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

- $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
 - $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
- Donner le reste, et le quotient sous forme d'une somme :
 - $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geq 2$).
 - $A = X^n$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 2$). On pourra utiliser le binôme ou bien une formule de Taylor-Young.
 - $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

Correction :

Détails :

- -
- On cherche $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$X^n = (X^2 - 1)Q + R,$$

et donc R sous la forme $aX + b$, avec a et b à trouver.

Si on ne voit pas la méthode astucieuse, on peut calculer le reste en évaluant en les racines 1 et -1 du diviseur. C'est pénible, et cela ne donne pas Q ... mais on voit que le reste vaut 1 ou X , selon la parité de n (on peut aussi le voir en s'échauffant sur des petites valeurs de n). On a alors l'idée d'un balayeur :

- Si n est pair, on écrit $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$X^n = X^{2p} = X^{2p} - 1 + 1 = (X^2)^p - 1 + 1 = (X^2 - 1) \times \sum_{k=0}^{p-1} (X^2)^k + 1.$$

Ainsi on a

$$Q = \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k} \quad \text{et} \quad R = 1.$$

- Si n est pair, on écrit $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, et on sert de ce qui précède :

$$X^n = X^{2p+1} = (X^2 - 1) \times X \times \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k} + X.$$

Ainsi on a

$$Q = \sum_{k=0}^{p-1} X^{2k+1} \quad \text{et} \quad R = 1.$$

- Dans l'idée de l'exercice précédent, on fait apparaître le diviseur, puis on applique le binôme :

$$X^n = (X - 1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X - 1)^k.$$

Les deux premiers termes donnent le reste, dans les suivants on factorise par $(X - 1)^2$ et on change d'indice :

$$X^n = \underbrace{1 + n(X - 1)}_{\text{Reste}} + (X - 1)^2 \underbrace{\sum_{p=0}^{n-2} \binom{n}{p+2} (X - 1)^p}_{\text{Quotient}}.$$

- La formule de Taylor en 1 est tout indiquée ici : puisque $\deg(A) = n + 1$, on a

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k = \underbrace{A(1) + (X - 1)A'(1)}_{\text{Reste}} + (X - 1)^2 \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A^{(p+2)}(1)}{p!} (X - 1)^p}_{\text{Quotient}}$$

Or on a

$$A(1) = 0 \quad \text{et} \quad A'(1) = 0,$$

et donc le reste vaut $R = 0$. On peut transformer un peu le quotient Q avec des formules de coefficients binomiaux et en calculant les dérivées en 1.

Exercice 6 ●●○ — Critère de divisibilité

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^2$.

— Exercice 7 ●● — Encore un critère de divisibilité

Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Idée : On peut penser au complexe j , qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).

Correction : On effectue la division euclidienne de $A = X^{2n} + X^n + 1$ par $B = X^2 + X + 1$, en vue de calculer le reste : il existe deux polynômes Q et R tels que

$$X^{2n} + X^n + 1 = (X^2 + X + 1)Q + R$$

avec $\deg R \leq 1$, c'est-à-dire $R = aX + b$ où a et b sont deux constantes à trouver.

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 (qui vaut $\bar{j}$), avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On évalue en ces racines :

$$\begin{cases} aj + b = j^{2n} + j^n + 1 \\ aj^2 + b = j^{4n} + j^{2n} + 1 \end{cases}$$

Or $j^4 = j \times j^3 = j$ et donc $j^{4n} = (j^4)^n = j^n$, d'où

$$j^{4n} + j^{2n} + 1 = j^{2n} + j^n + 1.$$

Ainsi on a

$$aj + b = aj^2 + b \iff a(j - j^2) = 0 \iff a = 0.$$

On a finalement $b = j^{2n} + j^n + 1$, que l'on doit calculer. Puisque $j^3 = 1$, c'est la congruence de n modulo 3 qui va jouer un rôle. On écrit

$$n = 3p + r \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{0, 1, 2\}.$$

On a alors $j^{3p} = (j^3)^p = 1$, et donc

$$j^n = j^{3p+r} = j^r \text{ et } j^{2n} = j^{6p+2r} = j^{2r}.$$

On a la disjonction de cas suivante :

- Si $r = 0$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = 3$. Donc le reste R vaut 3 et est non nul.
- Si $r = 1$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^2 + j + 1 = 0$. Donc le reste R est nul.
- Si $r = 2$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$. Donc le reste R est nul.

En conclusion, $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ si et seulement si 3 ne divise pas n .

Remarque : La preuve et le critère sont les mêmes que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors autant utiliser les complexes !

— Exercice 8 ●● — Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$ -uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1. Déterminer, pour chaque $(i, i_0) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, ce que vaut $L_i(a_{i_0})$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n+1$ points $(a_0, \dots, a_n)$.

— Exercice 9 ●● — Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

1. Proposer trois polynômes P_0 , P_1 et P_2 , solutions du problème pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit R_n un autre polynôme solution.
 - a. Montrer que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad P_n(t) = R_n(t).$$

On pourra écrire $t = \cos(\text{Arccost } t)$.

- b. En déduire que si P_n existe, il est unique.

Remarque : Ces deux questions ont des solutions très courtes. Vous avez pour contrainte de proposer une réponse courte (ou de passer votre tour).

3. Pour $n \geq 1$, développer $\cos((n+1)x)$ et $\cos((n-1)x)$. En déduire une relation entre $\cos((n-1)x)$, $\cos nx$ et $\cos((n+1)x)$.
4. Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie

$$\forall n \geq 1, \quad P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

5. En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.
6. En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser. Est-il scindé ?

— Exercice 10 ••○ — Un polynôme déjà vu

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Idée : Que dire de P'_n ?

Correction : On constate que $\deg(P_n) = n$. Ainsi, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P_n a n racines complexes comptées avec multiplicités. Afin de voir si elles sont simples, on calcule P'_n . On a

$$P'_n = \sum_{k=0}^n \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On effectue un glissement d'indice :

$$P'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1} = P_n - X^n.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $m \geq 2$ de P_n , on a

$$P_n(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P'_n(\alpha) = 0,$$

ce qui est absurde si on évalue l'identité précédente en α . Ainsi toutes les racines sont simples et P_n est scindé à racines simples.

— Exercice 11 •○○ — Lever une indétermination

Soit la fonction polynomiale $P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

Correction : C'est bien sûr une forme indéterminée. Voyons la multiplicité de la racine 1 en calculant les dérivées en 1, et au passage le DL en 1 avec la formule de Taylor.

On a $P(1) = 0$, et $P'(x) = 10x^4 - 60x^3 + 84x^2 - 28x - 6$, donc $P'(1) = 92 - 92 = 0$. Continuons : $P''(x) = 40x^3 - 180x^2 + 168x - 28$ et donc $P''(1) = 0$.

On peut s'arrêter là : 1 est racine de multiplicité au moins 3, et on peut écrire la formule de Taylor, lorsque $x \rightarrow 1$ à l'ordre 2 (tous les termes sont nuls) :

$$P(x) = o((x-1)^2) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2} = 0.$$

— Exercice 12 ••○ — Décomposition

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles :

1. $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
3. $\sum_{k=0}^7 X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
4. $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$, $P'(2)$, voire...).
5. $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Correction :

1. La décomposition est facile sur $\mathbb{R}$, avec des identités remarquables : on a sur $\mathbb{R}[X]$

$$X^5 - X = X(X^4 - 1) = X(X^2 - 1)(X^2 + 1) = X(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$

On s'arrête là, car $X^2 + 1$ est bien sûr irréductible sur $\mathbb{R}$. par contre, sur $\mathbb{C}$, on a

$$X^5 - X = X(X^4 - 1) = X(X^2 - 1)(X^2 + 1) = X(X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i).$$

2. La décomposition n'est pas clair sur $\mathbb{R}$ (on sait qu'elle existe), et si on ne connaît pas l'astuce, on commence par décomposer sur $\mathbb{C}$. On sait que $X^4 + 1$ possède quatre racines : les racines 4ème de -1 . Vous n'avez pas oublié la méthode ? On met le second membre sous forme exponentielle :

$$z^4 = -1 \iff z^4 = e^{i\pi},$$

on déduit une solution particulière : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, puis l'ensemble des racines :

$$\mathcal{S} = \{z_0 e^{\frac{2ik\pi}{4}}\} = \{e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}, e^{\frac{9i\pi}{4}}\}.$$

Ainsi, on a

$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - e^{\frac{9i\pi}{4}}).$$

On peut mettre ces racines sous forme algébriques, mais ce n'est pas nécessaire.

Comment récupérer la factorisation sur $\mathbb{R}$? On groupe les facteurs en gardant en tête qu'ils vont par paires conjuguées :

$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - \overline{e^{\frac{7i\pi}{4}}}).$$

Dans le cours, on a vu comment développer de tels facteurs :

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2,$$

ce qui donne ici :

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

Remarque : On peut raccourcir tout cela grâce à l'astuce très spéciale :

$$X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X).$$

3. Notons P le polynôme à factoriser. Tel quel, c'est dur, il faut reconnaître une quantité déjà vue. Une somme géométrique ? En effet, on a

$$(X - 1)P = X^8 - 1,$$

ainsi, ils suffit de factoriser $X^8 - 1$ (ou de trouver ses racines). On peut manipuler les racines 8-ième de l'unité (on obtient $\{e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket\}$), mais il est plus rapide d'écrire

$$X^8 - 1 = (X^4 - 1)(X^4 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1).$$

On déduit les factorisations sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ avec les exercices précédents (détails laissé à l'élève), en simplifiant par le facteur $X - 1$:

- Sur $\mathbb{C}$:

$$P = (X + 1)(X + i)(X - i)(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{5i\pi}{4}})(X - e^{\frac{7i\pi}{4}})(X - e^{\frac{9i\pi}{4}}).$$

- Sur $\mathbb{R}$:

$$P = (X + 1)(X^2 + 1)(X + 1)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X).$$

4. Exercice calculatoire mais sans piège. On a après calculs : $P(2) = 0$. Cela vaut le coup de savoir si 2 est racine double voire plus. On a

$$P' = 5X^4 - 32X^3 + 27X^2 + 116X \text{ et après calculs : } P'(2) = 0,$$

$$P'' = 20X^3 - 96X^2 + 54X + 116 \text{ et après calculs : } P''(2) = 0.$$

Ainsi, on sait que c'est gagné : on va factoriser par $(X - 2)^3 = X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ et il restera un polynôme de degré 2, que l'on sait étudier. En effet, après division euclidienne, on trouve

$$P = (X - 2)^3(X^2 - 2X - 15),$$

puis après une étude de racine (ou en trouvant des racines entières) :

$$P = (X - 2)^3(X + 3)(X - 5).$$

— Exercice 13 ••• — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

1. Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.
2. Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

Correction :

1. On a $P(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$, donc 1 est racine de P . Pour connaître la multiplicité, on dérive et on évalue en 1 :
 - On a $P' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$ et donc $P'(1) = 0$: ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 2.
 - On a $P'' = n(n+2)(n+1)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1}$ et donc $P''(1) = 0$: ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 3.
 - On a $P^{(3)} = n^2(n+2)(n+1)X^{n-1} - (n+2)(n+1)n(n-1)X^{n-2}$ et donc $P^{(3)}(1) = n(n+1)(n+2)(n - (n-1)) = n(n+1)(n+2) \neq 0$: ainsi 1 est racine de multiplicité exactement 3, c'est-à-dire une racine triple.
2. D'après le cours, P est divisible par $(X-1)^3$ mais pas par $(X-1)^4$.

— Exercice 14 ••• — Encore un critère de divisibilité

Soient a, b et c trois réels, et

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$

1. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P .
2. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P , et que P n'admette pas de racine réelle.

— Exercice 15 ••• — Polynômes et racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = (1 + X)^n - (1 - X)^n$.

1. Calculer P_n pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
2. Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).
3. P_n est-il divisible par X ?
4. a. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1.$$

- b. résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (discuter selon la parité de n).
- c. Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 ••◦ Polynôme annulateur et puissances d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Déterminer, pour $n \geq 3$, le reste de la division euclidienne de X^n par P . On écrira le résultat sous la forme $a_n X + b_n$, avec a_n et b_n à expliciter.
3. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.

Correction :

1. On calcule A^2 puis on cherche b et c tel que $A^2 = bA + cI_2$. On résout un système, et on trouve : $b = 7$ et $c = -10$. Ainsi le polynôme $P = X^2 - 7X + 10$ vérifie bien $P(A) = 0$.

Pour aller plus loin : Le polynôme P est appelé « polynôme annulateur de A ». On verra l'année prochaine qu'on peut toujours prendre $b = a_{11} + a_{22}$, la trace, et $c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, le déterminant. Cette formule magique sera théorisée et étudiée en dimension n .

2. Puisque $\deg(P) = 2$, la division de X^n par P est de la forme

$$X^n = PQ + a_n X + b_n = (X^2 - 7X + 10)Q + a_n X + b_n.$$

Comment calculer le reste sans avoir à calculer Q ? C'est classique et vu en cours : on évalue la relation sur les racines de P . Il est direct (calcul de discriminant ou bien racines entières évidentes) que ces racines sont 5 et 2. Ainsi, en évaluant :

$$\begin{cases} 5^n = 5a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{5^n - 2^n}{3} \\ b_n = \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3} \end{cases}.$$

3. On évalue la relation $X^n = PQ + a_n X + b_n$ en la matrice A , et comme $P(A) = 0$:

$$A^n = a_n A + b_n I_2,$$

que l'on peut expliciter sous forme matricielle.

Attention ! Lorsqu'on évalue un polynôme en une matrice $A \in M_m(\mathbb{K})$, bien penser à la convention $A^0 = I_m$ pour la constante du polynôme.

Exercice 17 ••◦ Décomposition en éléments simples

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \text{ a. } F(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}. \quad \text{ b. } F(X) = \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

$$\text{a. } F(X) = \frac{2X}{X^2 + 1}. \quad \text{ b. } F(X) = \frac{1}{X^2 + X + 1}.$$

3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).
4. $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$ sur $\mathbb{R}$ (à chercher sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$).
5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).

Correction :

1. a. Notons $F = \frac{P}{Q}$, puisque $\deg(P) = \deg(Q)$, on commence par chercher la partie entière de la fraction. Il est immédiat que

$$X^2 + 2X + 5 = (X^2 - 3X + 2) \times 1 + (5X + 3),$$

Ainsi,

$$F = 1 + \frac{5X + 3}{X^2 - 3X + 2}.$$

On essaye de factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$. On a deux racines évidentes, 1 et 2 (ou on fait un calcul de racines) :

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1),$$

donc on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F = 1 + \frac{5X + 3}{(X - 2)(X - 1)} = 1 + \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X - 1}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = 13$ et $b = -8$. Finalement :

$$F = 1 + \frac{13}{X - 2} - \frac{8}{X - 1}.$$

$$\text{b. } F(X) = \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

- a. Le numérateur a pour racines dans $\mathbb{C}$: i et $-i$. Ainsi on cherche des complexes a et b tels que

$$F(X) = \frac{2X}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = 1$ et $b = -1$. Finalement :

$$F(X) = \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}$$

- b.** On gagne du temps si on connaît les racines complexes de $X^2 + X + 1$ (sinon on fait un calcul de racines) : il s'agit de

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi on cherche des complexes a et b tels que

$$F(X) = \frac{1}{(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-\bar{j}}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = \frac{1}{j-\bar{j}}$ et $b = -a$. Or on a

$$j - \bar{j} = 2i \operatorname{Im}(j) = 2i\sqrt{3}$$

Finalement :

$$F(X) = \frac{2i\sqrt{3}}{X-j} - \frac{2i\sqrt{3}}{X-\bar{j}}$$

- 3.** $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).
- 4.** On est sensé savoir factoriser $X^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$: puisque -1 est racine évidente, on factorise par $X + 1$ et on trouve après calculs :

$$X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Ainsi, guidés par l'énoncé, on cherche des réels a , b et c tels que

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

Après application de la technique de base, on trouve $a = \frac{1}{3}$.

Pour b et c , il existe plusieurs techniques. Ma préférée : On raisonne lorsque $X \rightarrow +\infty$. D'abord, on multiplie par X :

$$\frac{X}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{aX}{X+1} + \frac{bX^2+cX}{X^2-X+1},$$

et on prend la limite lorsque $X \rightarrow +\infty$, on trouve $0 = a + b$ et donc $b = -\frac{1}{3}$.

Pour la dernière valeur, on peut évaluer en une valeur commode qui n'est pas un pôle. En 0, on obtient $1 = a + c$ et donc $c = 1 - a = \frac{2}{3}$.

Finalement :

$$F = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}}{X^2 - X + 1}$$

Remarque : On peut aussi multiplier par $X^2 - X + 1$ et évaluer en une racine de ce polynôme. Mais il faut manipuler des complexes ! Cette méthode est à réserver quand les racines complexes sont simplissimes, par exemple $\pm i$, pour le polynôme $X^2 + 1$. On peut aussi évaluer en 0, puis en 1. Un peu moins élégant...

- 5.** $F(X) = \frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le dénominateur et s'inspirer de ce qui précède).