

Feuille d'exercices 2

Nombres complexes (et géométrie)

— Exercice 1 ●○○ — Formes algébriques et inverses

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2}{-3 + 4i}, \quad z_2 = \frac{1 - 2i}{4 + 5i}, \quad z_3 = (4 - 2i)^3, \quad z_4 = \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}, \quad \theta \in]-\pi, \pi[.$$

— Exercice 2 ●○○ — Equations de degré 1 (et conjugués)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1. \quad z + 2i = iz - 1. \quad 2. \quad 2z + i = \bar{z} + 1. \quad 3. \quad z = \bar{z} + 2.$$

— Exercice 3 ●○○ — Formes trigonométriques bidouillées

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = -5i, \quad z_3 = 2ie^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, même question :

$$z_4 = 1 + i \tan \theta, \quad z_5 = \sin \theta + i \cos \theta.$$

— Exercice 4 ●●○ — La force du conjugué

Soient z et z' dans $\mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

— Exercice 5 ●○○ — La force de la forme exponentielle

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{24}, \quad (\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

— Exercice 6 ●○○ — Trouver la moitié

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, écrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique-exponentielle. En déduire son module et son argument. Retrouver le résultat en travaillant avec la forme algébrique.
2. Même question pour $e^{3i\theta} + e^{9i\theta}$.

— Exercice 7 ●○○ — De nouvelles valeurs particulières

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. En étudiant $\frac{z_1}{z_2}$, donner les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. Quelle méthode plus “bourrin” peut-on utiliser en exprimant $\frac{1}{12}$ à partir de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$?

— Exercice 8 ●●○ — Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, et qui vérifie de plus

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \begin{cases} f(z + z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Calculer $f(i)$, puis en déduire f .

— Exercice 9 ●●○ — Encore une équation fonctionnelle

Trouver les fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient $f(z) + zf(-z) = 1 + z$.

— Exercice 10 ●○○ — Un axe bien connu

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - i| = |z + i|$.

— Exercice 11 ●●○ —

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les vecteurs d'affixes z et $\frac{1}{z}$ soient orthogonaux.

— Exercice 12 ●●○ — Prendre de la hauteur

On se donne des nombres complexes a, b, c et d , avec $b \neq c$ et $a \neq c$, tels que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{c-a}$ sont imaginaires purs.

- Interpréter ces conditions pour les points d'affixes respectives A, B, C et D .
- Montrer en développant que $(d-a)(\bar{b}-\bar{c}) + (d-b)(\bar{c}-\bar{a}) + (d-c)(\bar{a}-\bar{b})$ est imaginaire pur.
 - En déduire que $\frac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur.
- En raisonnant *dans* le triangle ABC , montrer que l'on vient de prouver un résultat de géométrie bien connu.

Exercice 13 ••○ — Identité du parallélogramme

Montrer que pour tout nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Interprétez géométriquement.

Exercice 14 ••○ — Identité remarquable chez les complexes et inégalité

Les deux questions sont indépendantes.

- Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, développer $|a + b|^2$.
- Montrer que $|a + b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$. Etudier le cas d'égalité (plus dur).

Exercice 15 ••• — Identité remarquable chez les complexes et arithmétique

- Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, factoriser $a^2 + b^2$ en utilisant des complexes.
- On dit qu'un entier $N \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N = a^2 + b^2$. Soient N_1 et N_2 des entiers qui sont somme de deux carrés, montrer que $N_1 N_2$ est encore somme de deux carrés.

Exercice 16 ••○ — Encore du conjugué

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $4z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 ••○ — Eviter trop de calculs

On cherche les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Montrer que cette équation est équivalente à $z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 7$.
- Faire apparaître la quantité $|z - a|^2$ pour un $a \in \mathbb{C}$ bien choisi et conclure.

Exercice 18 ••○ — Une fraction qui se simplifie

- Pour quelles valeurs de z les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont-ils distincts deux à deux (c'est-à-dire tous distincts) ?
- On suppose que les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont distincts deux à deux. Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont alignés.
- Plus dur : même question avec z, z^2 et z^4 .

Exercice 19 ••• —

Que pensez-vous de l'affirmation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n \in \mathbb{R}.$$

On pourra utiliser que $\pi \notin \mathbb{Q}$...

Exercice 20 ••• — Etude d'une similitude

- (Cas particulier). Soit la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$s(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3}(1 - i)$$

- Montrer que l'équation $s(z) = z$ possède une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée ω . La calculer.
 - Déterminer un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $s(z) - \omega = \alpha(z - \omega)$. On pensera à écrire $s(z) - \omega = s(z) - s(\omega)$.
 - Mettre α sous forme trigonométrique et donner la nature géométrique de s .
- (Cas général) Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Dans les questions qui suivent, pour un z donné, on pourra représenter le vecteur d'affixe $z - \omega$, et décrire le point d'affixe $f(z)$.
 - Pour un $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, expliquer et illustrer avec un dessin la nature géométrique d'une fonction vérifiant $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
 - Pour un $\lambda > 0$ fixé, même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.
 - Même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \omega - z$.