

Chapitre 1

Compléments sur les suites et les séries

Sommaire

1.1 Comparaison des suites réelles	4
1.2 Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$	7
1.2.1 Le plan classique	8
1.2.2 Inégalités des accroissements finis	10
1.3 Suites définies implicitement, ie vérifiant une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$	11
1.4 Les suites définies à l'aide de fonctions réciproques : $f(u_n) = n$	12
1.4.1 Algorithmes rencontrés	13
1.5 Compléments sur les séries	16
1.5.1 Séries à termes positifs	16
1.5.2 Convergence absolue	17
1.5.3 Séries géométriques et séries géométriques dérivées	18
1.5.4 Séries exponentielles	19
1.5.5 Séries télescopiques	20
1.5.6 Comparaison avec une intégrale	21
1.5.7 Séries de Riemann	22
1.6 Point méthode	23

L'objectif de ce chapitre est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

On connaît de nombreuses suites qui tendent vers $+\infty$, parmi lesquelles par exemple : (n^2) , (2^n) , $(\ln(n))^3$, $n!$, $(n^2 + 2^n)$...

Mais certaines divergent "plus vite que d'autres", et d'autres "à la même vitesse".

Ce sont ces points que l'on va détailler dans ce chapitre.

Les résultats du cours sur les suites et les séries de première année sont à revoir.

Compétences attendues.

- ⇒ Savoir montrer qu'une suite est négligeable devant une autre.
- ⇒ Savoir trouver un équivalent à l'aide des opérations usuelles ou des équivalents classiques.
- ⇒ Déterminer la limite d'une suite à l'aide des équivalents.
- ⇒ Savoir étudier une suite récurrente d'ordre 1 (construction graphique, existence, variations, convergence...).
- ⇒ Savoir étudier une suite implicite (existence, variations...).

Edmund Landau est un mathématicien allemand de la première moitié du XX^{ème} siècle. Il fut l'un des plus grands spécialistes de théorie analytique des nombres, cette branche des mathématiques qui étudie les propriétés arithmétiques à l'aide des outils d'analyse. Il obtient son doctorat en 1899, sous la direction de Frobenius, puis son habilitation deux ans plus tard. Il enseigne alors à l'Université de Berlin. En 1909, il devient professeur à l'Université de Göttingen, où il succède à Minkowski. Avec notamment Hilbert et Klein, il contribue alors à faire de Göttingen le plus grand centre mondial de recherche en mathématiques. L'émergence du régime nazi le poussera bientôt à la retraite en 1934. Il enseigne un peu en Angleterre et aux Pays-Bas, puis s'en va à Berlin. Une crise cardiaque l'emporte en 1938. Landau est surtout connu pour les notations de domination O et de négligeabilité o qui portent son nom. (o pour initiale du mot allemand "Ordnung")
En fait, s'il contribua à les populariser, il semble qu'elles soient dues à Bachmann.

1.1 Comparaison des suites réelles

Définition 1.1 (🔗 Négligeabilité).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) , et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n \geq n_0}$ définie à partir du rang n_0 qui converge vers 0, telle que : $\forall n \geq n_0, u_n = \epsilon_n v_n$.

Remarques.

1. On ne s'intéresse qu'au comportement en $n \rightarrow +\infty$.
2. L'utilité de cette valeur n_0 vient du fait que v_n peut être nulle pour des valeurs de n où u_n ne le serait pas.
 $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{(n-10)(n-100)}{n^2+1}$, on ne peut pas trouver de suite ϵ_n pour laquelle :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \epsilon_n$.
 En effet : $v_{10} = v_{100} = 0$ et $u_{10} \neq 0, u_{100} \neq 0$.
3. La notation "petit o ", repose sur un abus d'écriture : $o(w_n)$ ne désigne pas une suite particulière mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant (w_n) .
 Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $u'_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors on n'a pas forcément $u_n = u'_n$!! $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ signifie que (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant (v_n) .

Exemples 1.1.

1. $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ (prendre $\epsilon_n = \frac{1}{n}$.)
2. Ecrire $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$ signifie que la suite (u_n) converge vers 0. Par exemple : $e^{-n} \underset{+\infty}{=} o(1)$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_n = n$, n'est pas négligeable devant la suite (v_n) définie par $v_n = 2n$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \epsilon_n$ avec $\epsilon_n = 1/2$ non convergente vers 0.
4. $u_n \underset{+\infty}{=} o(0)$ signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Théorème 1.1 (🔗 Caractérisation).

Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors on a l'équivalence suivante :

(u_n) est négligeable devant (v_n) : $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Propriétés 1.2 (🔗 Opérations sur o).

- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$. (Transitivité)
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, on a alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(\lambda v_n)$. (multiplication par un scalaire)
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $au_n + bv_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$. (Combinaisons linéaires)
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(t_n)$, alors $u_n v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n t_n)$. (produit)
- Si u_n et v_n sont non nulles alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right)$. (inverse)
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ alors $(u_n + v_n)$ est convergente vers b .
- Si (v_n) converge et si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors (u_n) converge vers 0.

Exemple 1.2.

$u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ car $u_n / v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème 1.3 (🔗 Négligeabilités usuelles : croissances comparées).

On a les comparaisons suivantes au voisinage de $+\infty$: ($u_n \ll v_n$ signifie $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$)

$$\forall (\alpha, \beta, q) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\times]1, +\infty[, (\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll q^n \ll n!$$

Plus précisément :

- $\forall q > 1, q^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$
- $\forall q > 1, \forall \alpha > 0, n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(q^n)$
- $\forall \beta > 0, \forall \alpha > 0, (\ln n)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(n^\beta)$
- $\forall \beta > 0, \forall \alpha > 0, n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta n})$
- $\forall q \in]0, 1[, \forall \alpha > 0, q^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

Définition 1.2 (🔗 Equivalence).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

(u_n) est équivalente à (v_n) : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n \geq n_0}$ définie à partir du rang n_0 qui converge vers 1, telle que : $\forall n \geq n_0, u_n = \epsilon_n v_n$.

Remarques.

1. On a la définition suivante équivalente à la précédente :
 (u_n) est équivalente à (v_n) : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe un entier n_0 et une suite ϵ_n définie à partir du rang n_0 qui converge vers 0, telle que : $\forall n \geq n_0, u_n = (1 + \epsilon_n) v_n$.
2. Cela revient à dire que $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou que $v_n - u_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$.
3. Attention la notation $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$ n'a aucun sens!

Exemples 1.3.

1. $u_n = \frac{1}{(n+1)}, v_n = \frac{(n-10)(n-100)}{n^3+1}$, on ne peut pas trouver de suite ϵ_n pour laquelle :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$.
 En effet : $v_{10} = v_{100} = 0$ et $u_{10} \neq 0, u_{100} \neq 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n - (\ln(n))^2$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n(1 - \frac{(\ln(n))^2}{n}) = n(1 - (\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}})^2)$.
 Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ (par croissances comparées) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}})^2) = 1$ ce qui entraîne que $u_n \sim_{+\infty} n$.

Théorème 1.4 (Caractérisation).

Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors on a l'équivalence suivante :

(u_n) est équivalent à (v_n) : $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple 1.4.

$$e^n + n^2 \sim_{+\infty} e^n \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + n^2}{e^n} = 1 \text{ car } \frac{e^n + n^2}{e^n} = (1 + \frac{n^2}{e^n}).$$

Propriétés 1.5 (Opérations sur $\sim$).

- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $v_n \sim_{+\infty} u_n$ (symétrie).
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n \sim_{+\infty} w_n$ alors $u_n \sim_{+\infty} w_n$. (transitivité)
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $r_n \sim_{+\infty} s_n$ alors $u_n r_n \sim_{+\infty} v_n s_n$. (produit)
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n, r_n \sim_{+\infty} s_n$ et si à partir d'un certain rang, $r_n \neq 0, s_n \neq 0$ alors $\frac{u_n}{r_n} \sim_{+\infty} \frac{v_n}{s_n}$. (quotient)
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors pour tout entier naturel k , on a $u_n^k \sim_{+\infty} v_n^k$ (puissance entière).
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n > 0, u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim_{+\infty} v_n^\alpha$. (puissance réelle)
- Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $|u_n| \sim_{+\infty} |v_n|$. (valeur absolue)
- Si (u_n) converge vers un réel $\ell \neq 0$ alors $u_n \sim_{+\infty} \ell$. (limite)

Théorème 1.6.

Deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) sont de même nature, c'est-à-dire

- (u_n) converge ssi (v_n) converge et dans ce cas elles ont la même limite.
- (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi (v_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

EXERCICE 1.1.

Soit k un entier naturel donné, calculer la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarques.

- ATTENTION la relation d'équivalence $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition :

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ et } r_n \sim_{+\infty} s_n \not\Rightarrow u_n + r_n \sim_{+\infty} v_n + s_n$$

$$n^2 + n \sim_{+\infty} n^2, -n^2 + 5 \sim_{+\infty} -n^2 + 1$$

mais

$$(n^2 + n) + (-n^2 + 5) \approx n^2 + (-n^2 + 1)$$

- la relation d'équivalence $\sim$ n'est pas compatible avec la composition par les fonctions exponentielle et logarithme. En effet :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$$

et

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$$

Par contre :

$$e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n = o(v_n)$ alors $(u_n + w_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
- La notion d'équivalence est fondamentale, d'une part pour trouver des limites de suite à priori indéterminées, et, d'autre part, pour l'étude de la convergence d'un grand nombre de séries.

EXERCICE 1.2.

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $n \leq u_n \leq 2n$ alors montrer que $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Théorème 1.7 ([↗ Equivalents usuels](#)).

Soit une suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors on a les équivalents suivants :

$$\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n, \quad e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n, \quad (1 + u_n)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} 1 + \alpha u_n$$

Théorème 1.8 ([↗ Equivalents "suites polynômes"](#)).

Avec les suites "polynômes" si $a_k \neq 0$:

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k \underset{+\infty}{\sim} a_k n^k$$

EXERCICE 1.3.

Donner un équivalent à chacune des suites ci-dessous :

$$1. \quad u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

$$2. \quad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

$$3. \quad w_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right).$$

1.2 Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $u_0 \in I$ fixé. On considère la suite définie par la donnée de u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans un sujet de concours, l'étude est souvent détaillée. Mais vous remarquerez que le plan d'étude de telles suites est toujours le même.

1.2.1 Le plan classique

1. Étudier la fonction f (faire son tableau de variations). Parfois, étudier le signe de $g : x \rightarrow f(x) - x$ est utile.
2. Vérifier que votre suite est bien définie, c'est-à-dire que vous pouvez calculer tous les u_n . Cela va dépendre de la valeur de u_0 .

EXERCICE 1.4.

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$. La suite u est-elle bien définie?

3. On peut avoir la représentation graphique de la suite donnée par un programme Python et demander d'émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite et son comportement asymptotique.
4. Recherche d'un minorant ou d'un majorant et parfois les deux!
On montre traditionnellement par récurrence que si $u_0 \in I$, alors pour tout $n, u_n \in I$. (On remarque que si I est minoré (resp. majoré), il en est alors de même pour (u_n)).
5. On cherche les limites possibles pour f , en utilisant le théorème (et la définition) suivant :

Définition 1.3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. Soit $\ell \in I$. On dit que ℓ est un point fixe de f si $f(\ell) = \ell$.

Remarque.

Les points fixes de f sont donc les solutions de l'équation $f(x) = x$, qui s'écrit aussi $f(x) - x = 0$.

Théorème 1.9 (Théorème du point fixe).

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, et **une suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **de réels éléments de I** , définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ et si f **est continue en ℓ** , alors ℓ est un point fixe de f .

On a donc $\ell = f(\ell)$.

Remarques.

-Autrement dit, si f est continue, et que (u_n) converge, c'est forcément vers un point fixe de f .

-Il faut être très vigilant sur la rédaction du théorème du point fixe car il y a beaucoup de choses à vérifier pour pouvoir l'appliquer! Voir le point méthode suivant.

• **Point méthode pour utiliser le théorème du point fixe**

Il y a plusieurs étapes :

- (a) On a montré que la fonction f est continue sur un intervalle I .
- (b) On a prouvé par récurrence (souvent) que la suite (u_n) (telle que $u_{n+1} = f(u_n)$) était bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
- (c) On a prouvé que u_n était convergente (souvent par théorème de CV monotone). Cela sous-entend que l'on a donné le sens de variation de (u_n) .
- (d) On écrit que u_n converge vers un réel ℓ en précisant bien dans quel intervalle appartient ℓ !! ℓ doit appartenir à I !
- (e) On écrit alors que f étant continue sur I , f est continue en ℓ ! Donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.
- (f) On trouve ℓ et on conclut pour la suite (u_n) .

6. Si on a pas encore étudié la convergence de la suite : on peut obtenir donc les limites éventuelles de la suite en résolvant l'équation $f(x) = x$.

Si $f(x) = x$ n'a pas de solution, on sait que (u_n) est divergente.

Si la limite éventuelle de la suite n'appartient pas à l'intervalle « stable » I , trouvé précédemment, la conclusion est similaire.

Le point fixe permet également quand on veut prouver que la suite diverge de faire un raisonnement par l'absurde : on suppose que la suite converge vers ℓ , par le théorème du point fixe, on sait que ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. On résout l'équation, on discute sur le ℓ que l'on a trouvé pour arriver à une contradiction.

EXERCICE 1.5.

Soit la fonction f définie pour tout réel x , par : $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ et soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Étudier la fonction f (variations et tableau complet).
- (b) Montrer que $\forall x \geq 0, 2e^x - x - x^2 > 0$ et $1 + x \geq \sqrt{1+x^2}$.
- (c) En déduire que $\forall x \geq 0, f(x) > x$.
- (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (e) Étudier le comportement asymptotique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7. Étude du sens de variation de (u_n) et conclusion !

Si on a étudié le signe de $f(x) - x$, on a le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, donc on obtient le sens de variation de la suite.

Si la fonction f est **croissante** sur I , alors on montre par **récurrence** que (u_n) est bornée puis qu'elle est croissante si $u_0 \leq u_1$ ou que (u_n) est décroissante si $u_0 \geq u_1$. On conclut en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si f est **décroissante** sur I , alors on montre par récurrence que les deux sous-suites (u_{2n}) et

(u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire l'une de l'autre. On étudie alors ces deux sous-suites. Si elles convergent vers une même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ . Parfois, on trouve une variante de ce plan, basée sur l'inégalité des accroissements finis.

EXERCICE 1.6 (Cas classique).

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. La suite u est-elle bien définie $\forall n \in \mathbb{N}$? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ?
3. Etudier le sens de variation de $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Conclure sur la convergence de la suite u .

EXERCICE 1.7 (Sous-suites).

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. La suite u est-elle bien définie $\forall n \in \mathbb{N}$? Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ?
3. Etudier le sens de variation de $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Etudier la convergence de ces deux sous-suites.
On montrera que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et que $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
5. Conclure sur la convergence de la suite u .

1.2.2 Inégalités des accroissements finis

On peut parfois se passer de l'étude de la monotonie de f : si f est continue sur un intervalle I et si on a un point fixe ℓ de f appartenant à I , on peut chercher un réel $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| < k$. L'inégalité des accroissements finis donne $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$. On montre alors par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. On conclut par le théorème d'encadrement car $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

• **Point méthode pour utiliser l'IAF**

Il y a plusieurs étapes :

1. **On a montré que la fonction f est continue et dérivable sur un intervalle I .**
2. **On prouve qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| < k$.**
3. **On a prouvé par récurrence (souvent) que la suite (u_n) (telle que $u_{n+1} = f(u_n)$) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.**
4. **On cherche le point fixe de f , ℓ avec $\ell \in I$.**
5. **On écrit alors d'après l'IAF appliquée à f , u_n et ℓ sur I on a :**
 $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_n - \ell|$.
6. **On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
 L'IAF permet de prouver l'hérédité.**
7. **On justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ car $k \in]0, 1[$ et donc d'après l'inégalité obtenue au point précédent, par le théorème d'encadrement, u_n converge vers ℓ .**

EXERCICE 1.8 (Utilisation de l'IAF).

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0; 1], |f'(x)| \leq 1/2$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $[0; 1]$ et donner la valeur de α .
4. Etudier la convergence de (u_n) .

1.3 Suites définies implicitement, ie vérifiant une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$

Attention, la situation n'est pas la même que pour les suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$: ici la fonction elle-même dépend de n et change donc à chaque étape.

Attention ici pas de théorème du point fixe!

Généralement f_n est strictement monotone.

Le contexte : soit I un intervalle. On a une famille (f_n) de fonctions définies sur I , et on suppose que pour tout n l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n . Le but est d'étudier cette suite (u_n) .

• **Point méthode pour $f_n(u_n) = 0$**

1. On a montré que la famille de fonction f_n est bijective de I sur $f(I)$.
2. On prouve qu'il existe un unique réel $u_n \in I$ tel que $f_n(u_n) = 0$ par le théorème de la bijection.
3. Le sens de variation de la suite s'obtient en étudiant le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur I .
En explicitant ce signe en $x = u_n$, on compare $f_{n+1}(u_n)$ et $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
On conclut en utilisant la stricte monotonie de f_{n+1} .
4. Pour montrer que la suite (u_n) est majorée (ou minorée) par un réel a , on peut comparer $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(a)$ puis utiliser la stricte monotonie de f_n .
On peut aussi simplement regarder à quel intervalle l'unique solution (u_n) de $f_n(x) = 0$ appartient.
5. Pour prouver la convergence de la suite (u_n) , on utilise en général le théorème de la limite monotone.

EXERCICE 1.9 (D'après EDHEC 1997).

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n \cdot \ln(x)$.

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
(a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
(c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1.4 Les suites définies à l'aide de fonctions réciproques : $f(u_n) = n$

Le contexte : la situation est assez semblable à la situation précédente : on considère une fonction f définie sur un intervalle I et réalisant une bijection de I sur $f(I)$ de telle sorte que pour tout $n, n \in f(I)$.

Pour tout n , l'équation $f(x) = n$ a donc une unique solution u_n . On cherche à étudier la suite (u_n) .

• **Point méthode pour $f(u_n) = n$**

1. On a montré que la fonction f est bijective de I sur $f(I)$.
2. On a montré que pour tout $n, n \in f(I)$.
3. On prouve qu'il existe un unique réel $u_n \in I$ tel que $f(u_n) = n$ par le théorème de la bijection.
4. Comme f réalise une bijection de I sur $f(I)$, elle admet une réciproque f^{-1} .
Si f est continue strictement monotone sur I , f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f , et les limites sont données par les bornes de I .
5. Alors pour tout $n, u_n = f^{-1}(n)$ et la monotonie de f^{-1} permet d'obtenir celle de (u_n) car $u_{n+1} = f^{-1}(n+1)$ et $u_n = f^{-1}(n)$ et on a toujours $n \leq n+1$.
6. Enfin, la limite de (u_n) est celle de f^{-1} en l'infini.

- EXERCICE 1.10.** 1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n . (On pourra étudier la fonction $f : x \rightarrow e^x + x$.)
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie.
3. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n \leq \ln n$ puisque, pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n) - 1$. (On pourra comparer $f(u_n)$ et $f(\ln(n) - 1)$).
4. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

1.4.1 Algorithmes rencontrés

Programme Python 1 : seuil pour une suite croissante

Si une suite croissante (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) : pour la suite u définie par $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

```
a = float(input( " Entrez a : " ) )
u=1
n=0
while u <= a :
    n=n+1 # on incrémente n
    u=1+u**2 # on calcule les termes de la suite
print ( " Le premier entier n tel que u_n > " ,a, " est : " , n)
# n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil
```

Programme Python 2 : suite convergente vers ℓ connu.

Si (u_n) suite définie par récurrence, convergente vers ℓ , on demande la plus petite valeur de n telle que $|u_n - \ell| < \epsilon$ où ϵ est saisi en entrée :

pour la suite u définie par $u_0 = 10, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$.

On admet que la suite converge vers 1.

```
import numpy as np

eps=float(input(' Entrer la valeur de epsilon : ')) # précision epsilon
u=10 # initialisation
n=0 # initialisation
l=1 # valeur de la limite
while np.abs (u-l) >= eps :
    n=n+1
    u=(u + 1/ u )/ 2 # la relation de récurrence
print (n)
```

Programme Python 3 : suite convergente vers ℓ inconnu.

Si (u_n) suite définie par récurrence, convergente vers ℓ , on demande une valeur approchée de ℓ telle que $|u_n - \ell| < \epsilon$ où ϵ est saisi en entrée :

pour la suite u définie par $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n} + 1$

On admet que la suite converge vers ℓ et que l'on a prouvé : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$

```
import numpy as np

eps=float(input(' Entrer la valeur de epsilon : ')) # précision epsilon
u=1 # initialisation
n=0 # initialisation

while (1/np.e)**n >= eps:
    n =n+1
    u = np.exp(-u )+1 # la relation de récurrence
print(u)
```

Programme Python 4 : Calcul d'un terme d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

La suite étant définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser une boucle for pour calculer u_N , avec ici $f: x \mapsto x/\ln(1+x)$.

```
import numpy as np

N=int(input(' Entrer N : ')) # Rang voulu : N
U= np.exp(1) #exp s'ecrit np.exp ou U=np.e # Valeur de u_0 : initialisation
# Boucle pour calculer u_N
for k in range (1, N+1): # k prend les valeurs 1,2, ..., N : on passe N fois
    dans la boucle
    U = U / np.log(1+U) # Rappel la fonction ln s'écrit np.log
print (U)
```

Programme Python 5 : On veut tous les termes de la suite jusqu'à N.

Calcul de tous les termes de u_0 à u_N dans le cas d'une suite $u_{(n+1)} = f(u_n)$, avec ici $f : x \mapsto x/\ln(1+x)$.

```
import numpy as np

N=int(input(' Entrer N : '))
U=np.e
print (U)
for k in range (1, N+1) :
    U= U / np.log (1+U)
    print (U) # même niveau d'indentation

    ou autre methode
import numpy as np

N=int(input(' Entrer N : ')) # Rang voulu : N

U=np.zeros(N+1)
U[0]=np.e # Valeur de u_0 : initialisation
# Boucle pour calculer u_N
for k in range (1, N+1): # k prend les valeurs 1,2, ..., N : on passe N fois
dans la boucle
    U[k]=U[k-1]/np.log(1+U[k-1])
print (U)
```

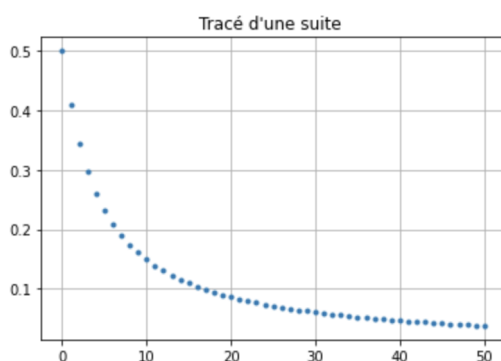
Programme Python 6 : On veut représenter graphiquement les termes $u_0, \dots, u_N$.

Dans le cas d'une suite $u_{(n+1)} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2/(1+x)}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=int(input(' Entrer N : '))
x=np.arange(N+1) # vecteur d'entiers pour les valeurs de 0 à N
U=np.zeros(N+1) # vecteurs U pour les valeurs de u_n
U[0]=1/2
for k in range (1, N+1) :
    U [k]=np.sqrt(U[ k-1 ]**2 /(1+U[k-1]))

x=np.arange(N+1)
plt.plot(x, U, '.')
plt.grid() #grille
plt.title("Représentation d'une suite ")
plt.show( )
```



1.5 Compléments sur les séries

1.5.1 Séries à termes positifs

Méthode :

si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes positifs, alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante.

On obtient le résultat suivant :

Propriété 1.10 (Séries à termes positifs).

Si $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente ssi la suite (S_n) est majorée.

Sinon, la suite (S_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge vers $+\infty$.

Remarque.

En général, pour majorer la suite (S_n) , on commence par majorer u_n : en sommant ces majorants, on en déduit un majorant de S_n .

Ceci permet d'introduire plusieurs techniques pour montrer qu'une série à termes positifs converge.

Théorème 1.11 (Critère de comparaison).

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang : $0 \leq u_n \leq v_n$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve.



EXERCICE 1.11.

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \frac{5}{4^n \ln n}$.
2. $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

Théorème 1.12 (Critère de négligeabilité).

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve.



EXERCICE 1.12.

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \frac{n^5}{e^n}.$
2. $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$

Théorème 1.13 ([🔗 Critère d'équivalence](#)).

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Preuve.



EXERCICE 1.13.

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1).$
2. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n^\alpha + 1}.$

1.5.2 Convergence absolue

Définition 1.4 ([🔗 Convergence absolue](#)).

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 1.14 ([🔗 Convergence absolue et convergence](#)).

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque.

Pour une série à termes quelconques, on peut donc étudier la série des valeurs absolues qui est une série à termes positifs et si cette dernière converge, alors la série initiale converge.

Exemple 1.5 (🔗 série ABSCV).

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{3^k}$ est absolument convergente car $\sum_{k \geq 0} \left| \frac{(-1)^k}{3^k} \right| = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k}$ qui est une série convergente. On obtient la convergence de la série mais pas la valeur de la somme.

Mais on aurait pu obtenir la convergence directement, car $\frac{(-1)^n}{3^n} = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ donc la série concernée est la série géométrique de raison $-1/3$ donc convergente.

Remarque.

La réciproque est fautive : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais elle ne converge pas absolument.

Théorème 1.15.

Si une série est absolument convergente, alors on ne change ni sa nature, ni sa somme, en changeant l'ordre de sommation de ses termes.

1.5.3 Séries géométriques et séries géométriques dérivées**Définition 1.5** (🔗).

Pour tout p entier, la série $\sum_{n \geq p} q^n$ s'appelle série géométrique de raison q .

Proposition 1.16 (🔗).

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Généralisation : la série $\sum_{n \geq p} q^n$ est convergente ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$.

Preuve.

On sait que la suite $(q^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 ssi $|q| < 1$. Donc la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ ne peut converger que si $|q| < 1$. (condition nécessaire de convergence)

Supposons $|q| < 1$. Alors $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $|q| < 1$. Donc la suite S converge vers $\frac{1}{1-q}$ ce qui prouve que la série converge et que sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$.

Pour la généralisation, il suffit de d'utiliser la formule généralisée de la somme géométrique ... $\diamond$

Proposition 1.17 (🔗 Convergence des séries géométriques dérivées première et deuxième).

1. La série $\sum_{n \geq 1} n q^{n-1}$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

2. La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1) q^{n-2}$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Remarque (Moyen mnémotechnique et justification des noms).

1. $\frac{d}{dq} q^n = nq^{n-1}$ et $\frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2}$.
2. Si on dérive deux fois q^n on obtient $n(n-1)q^{n-2}$ et de même la dérivée seconde de $\frac{1}{1-q}$ est $\frac{2}{(1-q)^3}$.

Exemples 1.6 (🔗 d'application).

1. Convergence de la série $\sum_{n \geq 0} nq^n$.
 $nq^n = q(nq^{n-1})$ et $q \neq 0$ donc les séries de terme général (nq^n) et (nq^{n-1}) sont de même nature (cf opérations sur les séries).
 Et si $|q| < 1$, cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = q \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \right) = \frac{q}{(1-q)^2}$.
2. Convergence de la série $\sum_{n \geq 0} n^2 q^n$.
 $\forall n \geq 0, n^2 q^n = [n(n-1) + n]q^n = q^2 [n(n-1)q^{n-2}] + nq^n$.
 Or si $|q| < 1$, les séries $\sum_{n \geq 0} n(n-1)q^{n-2}$ et $\sum_{n \geq 0} nq^n$ sont convergentes (d'après la proposition et ce qui précède) donc (opérations sur les séries) la série $\sum_{n \geq 0} n^2 q^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q^2 + q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$
 Si par contre, $|q| \geq 1$, cette série diverge car $n^2 q^n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

EXERCICE 1.14.

Etude de la série de terme général $\frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k}$.

1.5.4 Séries exponentielles

Définition 1.6 (🔗).

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ s'appelle série exponentielle.

Proposition 1.18 (🔗).

Pour tout nombre réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

EXERCICE 1.15.

Etude de la série de terme général $\frac{2k^2 + 3k + 5}{k!}$.

1.5.5 Séries télescopiques

Proposition 1.19 (L1).

Pour tout entier naturel n non nul, on a par télescopage :

$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$. Par conséquent : la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge.

Si c'est le cas, en notant ℓ la limite de la suite (u_n) , on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_0$.

EXERCICE 1.16 (D'après Edhec 1998).

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x) = 1 - e^{-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que (u_n) est convergente vers 0.

Etudier la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

1.5.6 Comparaison avec une intégrale

Proposition 1.20 (🔗 le principe). Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ **décroissante** et $u_k = f(k)$. On a alors par décroissance de f : pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [k; k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. On intègre cette inégalité (les bornes étant croissantes) :

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

On calcule en n'oubliant pas que k est une constante :

$$f(k+1)[t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)[t]_k^{k+1}$$

Ce qui donne :

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq u_k$$

On somme les termes de cet encadrement pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

On utilise ensuite la relation de Chasles pour le membre du milieu dans cette inégalité, et un changement d'indice sur la première somme :

$$\sum_{k=1}^n u_k = S_n - u_0 \leq \int_0^n f(t) dt \leq S_n - u_n$$

On peut ensuite renverser la relation, en pensant à couper l'encadrement en deux inégalités distinctes qu'on traite différemment.

-l'inégalité de gauche donne :

$$S_n \leq \int_0^n f(t) dt + u_0$$

-l'inégalité de droite donne :

$$S_n \geq \int_0^n f(t) dt + u_n$$

On rassemble tout cela pour obtenir l'encadrement de S_n :

$$\int_0^n f(t) dt + u_n \leq S_n \leq \int_0^n f(t) dt + u_0$$

Cette méthode permet de ramener l'étude de la convergence d'une série à l'étude d'une intégrale. Or, s'il y a très peu de méthodes pour calculer des sommes (télescopes, séries géométriques et c'est tout!), il y en a de nombreuses pour les intégrales (primitivation directe, intégration par parties, changement de variables).

1.5.7 Séries de Riemann

Proposition 1.21 () .

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Preuve.



1.6 Point méthode

- Pour répondre à la question " étudier la nature de la série et/ou calculer la série ... " :

1. Le terme général de la série tend-il vers 0 ? Si la réponse est non, la série est divergente, si la réponse est oui, il faut poursuivre l'étude.
2. Peut-on calculer S_n ? (par exemple, dans le cas d'une somme télescopique)
Si oui, vous pouvez conclure quant à la nature de la série via la définition et calculer la somme.
3. Est-ce une série de référence ? Ou peut-elle se ramener à une série de référence ?
Si oui, vous pouvez conclure quant à la nature de la série (résultats du cours), et calculer la somme.
4. Le terme général est-il positif ? Si oui, essayez de majorer (ou minorer) les sommes partielles (S_n) pour obtenir la convergence (ou la divergence). (On commencera par majorer (minorer) le terme général).
Si non, étudiez l'absolue convergence, pour vous ramener à une série à termes positifs ...
Dans tous les cas, suivez les indications de l'énoncé!!

Remarque.

Seuls les points 2. et 3. donnent une méthode pour **calculer** des séries. Les autres points donnent uniquement des méthodes pour étudier la **nature** de la série (convergence ou divergence).

EXERCICE 1.17.

Etude de la nature des séries de termes généraux suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^4 + 2}$
2. $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$

EXERCICE 1.18.

Étudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$
2. $u_n = \frac{x^{2n}}{2n!}$ (on donnera sa somme également),
3. $u_n = e^{-n^2}$.

Feuille d'exercices n°1

COMPLEMENTS SUR LES SUITES ET LES SERIES.

Exercice 1.

Montrer qu'une suite est négligeable devant une autre

1. Montrer que si $0 < |x| < 1$ alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, n^\alpha = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

2. Soit $q \in \mathbb{R}$, montrer que $q^n = o_{+\infty}(n!)$.

3. Soit $q \in]-1, 1[$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > 2$, montrer que $n^k q^n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2. Trouver un équivalent à l'aide d'opérations usuelles et des équivalents usuelles

1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \sim_{+\infty} \frac{n^k}{k!}$.

Exercice 3. Trouver un équivalent d'une composée par une fonction usuelle

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère les suites définies par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Justifier que $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et que $\ln(u_n)$ n'est pas équivalent à $\ln(v_n)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = 2 - e^{-\frac{1}{n^2}}$. Donner un équivalent de $\ln(u_n)$ au voisinage de $+\infty$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on considère $u_n = n^2 - n$. Donner un équivalent en $+\infty$ de $\ln(u_n)$.
4. Donner un équivalent en $+\infty$ de $v_n = e^{\frac{1}{ne^n}}$.

Exercice 4.

Trouver un équivalent d'une composée par une fonction usuelle, preuve résultats du cours

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. Si de plus à partir d'un certain rang, $u_n > 0, v_n > 0$, montrer que : $\sqrt{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice 5.

Trouver un équivalent à l'aide d'opérations usuelles et des équivalents usuelles

Etudier la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où, $0 < a < b$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Exercice 6.

Trouver un équivalent par encadrement

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$, vérifiant :

$$3n^2 - n \ln(n) \leq u_n \leq 3n^2 + n\sqrt{7n} + 1.$$

Donner la limite de u_n ainsi qu'un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7.

Etude de suites $f(u_n) = u_{n+1}$

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ et (u_n) une suite telle que $u_0 = 1/4$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f sur $[0, 1]$.
2. En déduire que la suite est convergente.
3. Déterminer la limite de (u_n) .
4. Ecrire un programme Python permettant de représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice 8.

Etude de suites $f(u_n) = u_{n+1}$

On considère la fonction $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ et la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. Etudier les variations de f .
2. Montrer qu'un réel positif est solution de l'équation $f(x) = x$ ssi il vérifie l'équation $x^3 + x - 2 = 0$.
3. En déduire que la fonction f admet sur $\mathbb{R}^+$ un unique point fixe α que l'on précisera.
4. Soit g une application quelconque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, un point fixe de g est-il nécessairement un point fixe de $g \circ g$? Un point fixe de $g \circ g$ est-il nécessairement un point fixe de g ?
5. Quels sont les points fixes de $f \circ f$?
6. Calculer les 4 premiers termes de v_n . Montrer que pour tout entier n , on a : $v_n \in [0, 2]$.

7. Etudier la monotonie des suites (v_n) , (v_{2n}) , (v_{2n+1}) .
8. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 9.**Nature des séries de terme général**

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^{1/n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{5}{n\sqrt{n}} - \frac{(-\sqrt{3})^n}{n!}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{2}{n}$.

Exercice 10.**Critère de comparaison pour les séries à termes positifs**

Nature des séries de terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \times n!}$.

Exercice 11.**Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs**

Nature des séries de terme général :

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+p)}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n+p} - \sqrt{n}$.

Exercice 12.**Critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs**

Nature des séries de terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{1}{\ln n}$.

Exercice 13.**Séries ABSCV**

Nature des séries de terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \times \frac{1}{3^{\ln n}}$.

Exercice 14.**Calculs de somme**

Prouver la cv des séries de terme général suivants et calculer leur somme :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 4n - 1}{3^{2n+1}}.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{(2n)!}, v_n = \frac{1}{(2n+1)!}.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}).$

Exercice 15.**Etude de suites $f(u_n) = u_{n+1}$**

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $u_0 = \frac{5}{2}$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}$;

1. Ecrire un programme Python, permettant d'avoir les 10 premiers termes de la suite (u_n) et de les représenter graphiquement.
2. Que constate-t-on ?
3. Etudier la suite (u_n) .

Exercice 16. EDHEC 1998

On considère le fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1. (a) Dresser le tableau de variations de f .
(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$

- (b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0, 1]$
(b) Montrer, grâce à la question I 1), que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - u_{n+1} \geq 0$
(c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.
2. (a) Simplifier, pour tout n élément de $\mathbb{N}^\times$, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.
(b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

- (c) En utilisant la question I 2), montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \frac{u_n^2}{2}$ en $+\infty$.
- (d) Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2 .

Exercice 17. EDHEC 2010

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

- Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .
- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
 - Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
 - Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
- En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
- On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
 - Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
 - Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
 - Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 18. EDHEC 2012

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.
 - Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
- Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$.
 - Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 - En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

3. (a) Écrire une fonction Python qui renvoie la valeur de u_n .
- (b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice 19. ECRICOME 1997

α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}$$

1. Etude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$
 - (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$
 - (b) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$$

- (c) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$
2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$
 - (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n + \alpha}$$

- (b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

Exercice 20. HEC 2009

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
- (b) La suite est-elle convergente ?
Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$
2. (a) Montrer que : $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.
- (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$
- (c) En déduire un équivalent de u lorsque n tend vers $+\infty$
3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b .
4. On rappelle que pour tout réel x , la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

- (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$
- (b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$, en fonction de u_{2n}
5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.
- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} n^k y^n$ est absolument convergente.
- (b) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$
- (c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$