Nombres complexes – Fiche de cours

1. L'idée des nombres complexes

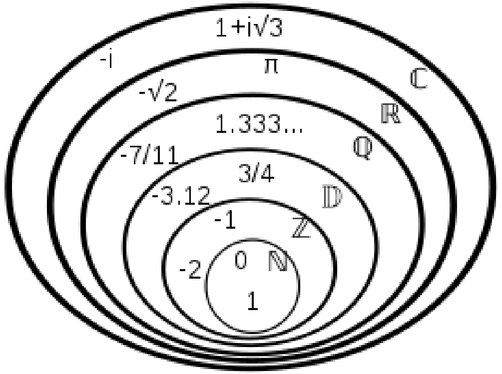
Résoudre des équations polynomiales de degré n ≥1

Exemple : obtenir 2 solutions pour l'équation $x^2+1=0$

2. Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (avec perte de la comparaison)
- $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2=-1$



3. Nombre complexe

Un nombre complexe est défini par :

$z=x+iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe

x : partie réelle notée $\mathrm{Re}(z)$

y : partie imaginaire notée $\mathrm{Im}(z)$

4. Opérations sur les nombres complexes

On considère les nombres complexes :

$$z=x+iy \quad \text{et} \quad z'=x'+iy'$$

a. La somme

La somme complexe de z et z' est définie de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$z+z'=x+x'+i(y+y')$$

b. Le produit

Le produit complexe de z et z' est défini de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$z\cdot z'=xx'-yy'+i\cdot(x'y+xy')$$

c. Inverse d'un nombre complexe

L'inverse d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C}^*\rightarrow\mathbb{C}^*$ par :

$$\frac{1}{z}$$

d. Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$\overline{z}=x-iy$$

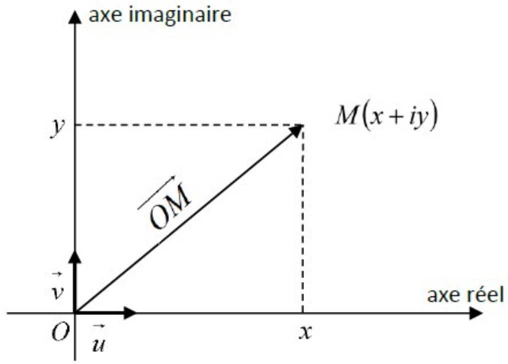
5. Représentation graphique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$

A tout nombre complexe $z=x+iy$ on associe le point $M(x;y)$

Propriétés :

- M s'appelle l'image de z
- z s'appelle l'affixe de M



6. Forme trigonométrique des nombres complexes

Soit le nombre complexe $z=x+iy$ ayant pour image M dans le repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$

On définit le module de z par $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ avec $r>0$

Ou bien $|(z)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}$

On définit un argument de z par $\theta=arg(z)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

La forme trigonométrique est définie par : $z=|z|(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$

Nombres complexes – Exercices – Devoirs

Exercice 1

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- i^3 • $\frac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6

2) En posant, $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 2

Écrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

a. $\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$; b. $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$; c. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$;

d. $\dfrac{4}{1+\mathrm{i}}$; e. $\dfrac{2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$; f. $\dfrac{\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$;

g. $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$; h. $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$; i. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{5}{1+3\mathrm{i}}$.

Exercice 3

Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 4

Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $z = \dfrac{1+i}{3-4i}$ b) $z = (2+2i)(-1+i)$

c) $z = \dfrac{i(-1-i)}{-3+4i}$ d) $z = \dfrac{-4(2-i)}{2i(1+2i)}$

Exercice 5

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$ • $z_5 = -\sqrt{3} + i$ • $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Exercice 6

Soit $z = 2 - 2i$, $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = -2$.

1. Donner la forme trigonométrique de ces trois nombres complexes.
2. Déterminer le module de $z \times z_1^2$ et z_2^3.
3. En déduire le module puis la forme algébrique de $\frac{z \times z_1^2}{z_2^3}$.

Exercice 7

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2cm.

1. On considère le nombre complexe z dont l'écriture trigonométrique est $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
   a. Donner le module et un argument de z.
   b. Placer le point M d'affixe z.
   On laissera les traits de construction.
   c. Déterminer la forme algébrique de z.
2. Soit $z_1 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6}$.
   Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Exercice 8

1. Déterminer la forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$.
2. Déterminer la forme algébrique de $z' = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice 9

1. Déterminer la forme trigonométrique de $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.
2. Déterminer la forme algébrique de $z' = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Exercice 9

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$.
2. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs de $[GC]$ et $[AB]$.

Exercice 10

1. Écrire sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$ les nombres complexes suivants :
   $z_1 = (2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$ $\quad z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}$ $\quad z_3 = \dfrac{3+2\mathrm{i}}{1-4\mathrm{i}}$
   $z_4 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$
2. Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
   $z_5 = -2+2\mathrm{i}$ $\quad z_6 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ $\quad z_7 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
   $z_8 = \mathrm{i}\sqrt{3}$

Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Soit A le point d'affixe le nombre complexe z_A de module $\dfrac{3}{2}$ d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$.
   Donner la forme algébrique de z_A.
2. Soit B le point d'affixe $z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   Calculer le module et un argument de z_B.

3. Soit C le point d'affixe $z_C = \dfrac{4i}{\overline{z_B}}$ où $\overline{z_B}$ est le conjugué de z_B.

   a) Donner une forme algébrique de z_C.

   b) En déduire le module et un argument de z_C.

4. Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

5. Le triangle ABC est-il rectangle en B ?